LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

MATEMATYKA

Henryk Pawłowski

2

ZAKRES ROZSZERZONY

Podręcznik

SERIA SZKOŁA XXI

operon® WYDAWNICTWO PEDAGOGICZNE

Henryk Pawłowski

MATEMATYKA 2

ZAKRES ROZSZERZONY

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego

operon®
WYDAWNICTWO
PEDAGOGICZNE

Gdynia 2003

Projekt okładki: *Krzysztof Godlewski*
Redaktor prowadzący: *Sebastian Przybyszewski*
Redaktor wspomagający: *Anna Wierzchowska*
Redakcja językowa: *Elżbieta Pałasz*
Redakcja graficzna i skład: *Jacek Papis*
Korekta techniczna: *Anna Wierzchowska*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym na poziomie klasy II liceum ogólnokształcącego, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr hab. Marii Korcz – z rekomendacji Polskiego Towarzystwa Matematycznego, dr. hab. Marka Kordosa – z rekomendacji Uniwersytetu Warszawskiego, dr. hab. Edwarda Tutaj – z rekomendacji Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz dr. Marka Gumkowskiego – z rekomendacji Polskiej Akademii Nauk.

Numer dopuszczenia 301/03

Wydawca:
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. (0-58) 679 00 00
http://www.operon.pl
e-mail: info@operon.pl

Druk i oprawa: Zakłady Graficzne im. KEN

ISBN 83-7390-147-7

SPIS TREŚCI

Od Wydawcy ... 5
I. Trójmian kwadratowy ... 7
1. Postać ogólna i postać kanoniczna trójmianu kwadratowego ... 7
2. Wykres funkcji kwadratowej ... 10
3. Ekstremum funkcji kwadratowej oraz jej wartości: najmniejsza i największa w przedziale ... 15
4. Zadania prowadzące do ekstremum funkcji kwadratowej ... 18
5. Miejsca zerowe oraz znak funkcji kwadratowej ... 20
6. Wzory Viète'a ... 29
7. Równania i nierówności kwadratowe ... 32
8. Zadania z parametrem ... 36
   8.1. Równania kwadratowe z parametrem ... 36
   8.2. Nierówności kwadratowe z parametrem ... 43
9. Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych ... 45
II. Wielomiany ... 49
1. Wielomian jednej zmiennej, stopień wielomianu, równość dwóch wielomianów ... 49
2. Działania na wielomianach ... 52
3. Twierdzenie o dzieleniu z resztą. Podzielność wielomianów ... 56
4. Schemat Hornera i twierdzenie Bézouta ... 60
5. Pierwiastek wielomianu i jego krotność ... 65
6. Wzory Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia ... 67
7. Wymierne pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych ... 71
8. Rozkład wielomianu na czynniki ... 73
9. Równania wielomianowe ... 76
10. Nierówności wielomianowe ... 79
III. Funkcja wymierna ... 85
1. Pojęcie funkcji wymiernej i działania na funkcjach wymiernych ... 85
2. Przekształcanie wyrażeń wymiernych ... 89
3. Równania wymierne ... 92
4. Równania wymierne z parametrem ... 96
5. Nierówności wymierne ... 98
6. Funkcja homograficzna ... 103
IV. Ciągi liczbowe ... 109
1. Pojęcie ciągu i ciągu liczbowego. Sposoby określania ciągów liczbowych ... 109
2. Monotoniczność ciągu liczbowego ... 113
3. Ciąg arytmetyczny i jego własności ... 117
4. Wzór na n-ty wyraz i wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego ... 121
5. Ciąg arytmetyczny w zadaniach ... 125
6. Ciąg geometryczny i jego własności ... 129
7. Monotoniczność ciągu geometrycznego ... 136
8. Ciąg geometryczny w zadaniach ... 137
9. Procent składany. Obliczenia związane z oprocentowaniem lokat i kredytów ... 140
10. Pojęcie granicy ciągu nieskończonego – wprowadzenie ... 142
11. Granica ciągu nieskończonego. Własności ciągów zbieżnych ... 144
12. Działania na ciągach zbieżnych ... 153

13. Wyznaczanie granic ciągów zbieżnych ... 156
14. Ciągi rozbieżne do nieskończoności i ich własności ... 160
15. Szereg geometryczny i jego zbieżność ... 165
16. Szereg geometryczny w zadaniach ... 170
V. Związki miarowe w trójkącie ... 175
1. Twierdzenie sinusów i jego zastosowania ... 176
2. Twierdzenie cosinusów (Carnota) i wnioski z tego twierdzenia ... 183
VI. Wektory ... 193
1. Pojęcie wektora. Wektor swobodny. Dodawanie i odejmowanie wektorów ... 193
2. Iloczyn wektora i liczby ... 200
3. Zastosowanie wektorów do dowodzenia w geometrii ... 204
4. Iloczyn skalarny wektorów i jego własności ... 207
5. Zastosowanie iloczynu skalarnego wektorów w geometrii ... 212
6. Wektory na osi liczbowej i na płaszczyźnie współrzędnych ... 216
6.1. Współrzędne wektora na osi liczbowej ... 216
6.2. Współrzędne wektora na płaszczyźnie ... 218
6.3. Stosunek podziału wektora ... 222
6.4. Iloczyn skalarny wektorów w układzie współrzędnych ... 224
VII. Przekształcenia geometryczne płaszczyzny ... 231
1. Pojęcie przekształcenia geometrycznego. Przykłady przekształceń geometrycznych ... 231
2. Punkty stałe przekształcenia geometrycznego. Przekształcenie tożsamościowe. Składanie i odwracanie przekształceń ... 234
3. Przekształcenia izometryczne ... 236
4. Obrazy figur w izometrii ... 238
5. Punkty stałe izometrii ... 239
6. Przystawanie figur ... 241
7. Symetria osiowa i jej własności ... 243
8. Oś symetrii figury. Figury osiowo symetryczne ... 245
9. Przystawanie trójkątów ... 246
10. Zastosowanie cech przystawania trójkątów do dowodzenia twierdzeń ... 250
11. Przesunięcie równoległe ... 252
12. Symetria środkowa i jej własności ... 256
13. Środek symetrii figury. Figury środkowo symetryczne ... 261
14. Obrót płaszczyzny i jego własności ... 262
15. Metoda przekształceń geometrycznych w zadaniach ... 269
16. Jednokładność płaszczyzny i jej własności ... 271
17. Obrazy figur w jednokładności. Figury jednokładne ... 276
18. Zastosowanie jednokładności w zadaniach ... 280
19. Podobieństwo płaszczyzny i jego własności. Podobieństwo figur ... 284
20. Cechy podobieństwa trójkątów ... 286
21. Twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem ... 290
22. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do dowodzenia twierdzeń ... 291

Odpowiedzi i wskazówki ... 296
Literatura pomocnicza ... 347
Tablice ... 348
Indeks ... 350

W matematyce nie ma drogi specjalnej dla królów.

Euklides

Od Wydawcy

Podręcznik *Matematyka 2. Zakres rozszerzony* jest przeznaczony dla uczniów liceum ogólnokształcącego. Jest on częścią pakietu edukacyjnego, w którego skład wchodzą: program nauczania, zbiór zadań, przewodnik metodyczny dla nauczyciela, scenariusze lekcji, testy, stereogramy oraz filmy edukacyjne. Wszystkie te pozycje są ze sobą ściśle zintegrowane i pozwalają na pełne wykorzystanie nowoczesnych metod dydaktycznych w nauczaniu matematyki.

Tom drugi podręcznika zawiera siedem rozdziałów: „Trójmian kwadratowy", „Wielomiany", „Funkcja wymierna", „Ciągi liczbowe", „Związki miarowe w trójkącie", „Wektory", „Przekształcenia geometryczne płaszczyzny". Dzięki przejrzystej i powtarzalnej strukturze podręcznika przekazywana w nim wiedza jest doskonale uporządkowana.

Liczne przykłady ułatwiają zrozumienie omawianych tematów, a utrwaleniu wiadomości służą zamieszczone na końcu każdego podrozdziału pytania i zadania, które swoją treścią często nawiązują do sytuacji z życia codziennego. Pytania i zadania o wysokim stopniu trudności, a także trudniejsze dowody twierdzeń i przykłady oznaczono jedną gwiazdką (*), natomiast dwiema gwiazdkami (**) wyróżniono materiał o bardzo wysokim stopniu trudności, przeznaczony dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Na końcu książki znajdują się tablice, pomocne w usystematyzowaniu wiedzy, oraz spis literatury pomocniczej i polecane strony internetowe.

Prosimy o nadsyłanie pod adresem Wydawnictwa wszelkich uwag i sugestii. Będą one niezwykle przydatne w pracach nad kolejnymi publikacjami. Uczniom życzymy, aby praca z podręcznikiem przyczyniła się do wielu sukcesów w nauce.

Objaśnienia piktogramów i oznaczeń

 definicja

 pytania i zadania

□ dowód twierdzenia

■ dowód wniosku, przykładu lub lematu

* zadania i przykłady o wysokim (podwyższonym) stopniu trudności

** zadania i przykłady o bardzo wysokim stopniu trudności

I. Trójmian kwadratowy

1. Postać ogólna i postać kanoniczna trójmianu kwadratowego

Trójmianem kwadratowym jednej zmiennej x nazywamy wyrażenie ax^2+bx+c, gdzie a, b i c są danymi liczbami, przy czym $a \neq 0$.

!!

Przykłady:

1. x^2+5x+6 jest trójmianem kwadratowym zmiennej x, w którym $a=1$, $b=5$, $c=6$.
2. $-x^2+3x+2$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej x, w którym $a=-1$, $b=3$, $c=2$.
3. $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej x, w którym $a=\frac{1}{2}$, $b=-\sqrt{3}$, $c=-\sqrt{2}$.
4. $t-t^2$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej t, w którym $a=-1$, $b=1$, $c=0$, bo $t-t^2=(-1)t^2+1\cdot t+0$.
5. $4-y^2$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej y, w którym $a=-1$, $b=0$, $c=4$, bo $4-y^2=(-1)\,y^2+0\cdot y+4$.

Postać ax^2+bx+c trójmianu kwadratowego zmiennej x nazywać będziemy **postacią ogólną**, a występujące w nim liczby a, b i c – **współczynnikami**. Zatem w przykładach 1, 2, 3 zostały podane trójmiany kwadratowe w postaci ogólnej, zaś w przykładach 4 i 5 – nie. Oczywiście na ogół rozważać będziemy trójmiany kwadratowe jednej zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych.

Powróćmy do naszego trójmianu w postaci ogólnej: ax^2+bx+c. Wyłączając w nim współczynnik a przed nawias, otrzymamy:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),\ \text{bo}\ a\neq 0.$$

Rozpatrując wyrażenie $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, zauważymy, że pierwszy jego wyraz jest kwadratem zmiennej x, drugi zaś można zapisać jako podwojony iloczyn x i $\frac{b}{2a}$, czyli: $\frac{b}{a}x=2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}$. Dodając do omawianego wyrażenia $\frac{b^2}{4a^2}$ i $\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)$, otrzymamy:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}.$$

Ponieważ $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, zaś $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

stąd ostatecznie:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Mamy więc równość:

$$(*)\ ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Występujące w niej wyrażenie $b^2 - 4ac$ nazywać będziemy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, oznaczając je symbolem Δ (grecka litera delta). Zatem:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

Równość $(*)$ możemy zapisać następująco:

$$(**)\ ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Postać $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy **postacią kanoniczną** lub **zasadniczą**.

Przykłady:

1. $x^2 + 2x - 2 = \left(x^2 + 2x + 1\right) - 3 = \left(x + 1\right)^2 - 3.$
2. $x^2 - 3x + 1 = \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$
3. $-x^2 + x = -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$
4. $-2x^2 + 12x + 4 = -2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 22.$
5. $3x^2 + 3\sqrt{2}\,x + \frac{3}{2} = 3\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$
6. $-4x^2 + 16x + 20 = -4\left(x^2 - 4x + 4\right) + 36 = -4\left(x - 2\right)^2 + 36.$

Gdy wprowadzimy oznaczenia:

$$p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},$$

równości $(**)$ możemy nadać jeszcze prostszą postać:

$$(***)\ ax^2 + bx + c = a\left(x - p\right)^2 + q.$$

Teraz widzimy, że aby sprowadzić trójmian $ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej, wystarczy jego współczynniki a, b, c podstawić do wzorów: $\Delta = b^2 - 4ac$, $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$, a następnie skorzystać z równości $(***)$.

Sposób ten bywa dogodniejszy niż przedstawiony w przykładach 1–6 (uzupełnianie do kwadratu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń), gdy współczynniki trójmianu są ułamkami lub liczbami niewymiernymi.

Przykład 1. Sprowadź do postaci kanonicznej trójmian $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$.
Rozwiązanie:

Wypisujemy współczynniki: $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, następnie obliczamy:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{9} = \frac{81 - 8}{36} = \frac{73}{36},$$

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4},\quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{73}{36}}{\frac{4}{3}} = -\frac{73}{36}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{73}{48}$$

i otrzymujemy:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{73}{48}.$$

Przykład 2. Przedstaw w postaci kanonicznej trójmian $-\sqrt{2}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = -\sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = -\sqrt{6}$, więc:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{6}\right) = \frac{3}{4} - 8\sqrt{3} = \frac{3 - 32\sqrt{3}}{4},$$

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8},$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3 - 32\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 32\sqrt{6}}{32}.$$

Zatem:

$$-\sqrt{2}\,x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2 + \frac{3\sqrt{2} - 32\sqrt{6}}{32}.$$

Pytania i zadania

1. Co to jest trójmian kwadratowy?
2. Co to jest wyróżnik trójmianu kwadratowego?
3. Przedstaw trójmian $ax^2 + bx + c$ w postaci kanonicznej.
4. Sprowadź następujące trójmiany do postaci kanonicznej:

   a) $x^2 + 5x + 4$; b) $-3x^2 + 12x + 20$; c) $4x^2 - 16x - 4$;

   d) $-4x^2 + x + 12$; e) $\sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{8}\,x + 2$; f) $x^2 + x$;

   g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$; h) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$; i) $6x^2 - 192x + 1242$.
5. Rozwiąż równania:

   a) $x^2 + 4x + 4 = 1$; b) $x^2 - 6x + 4 = 20$; c) $x^2 + 2x = 3$;

   d) $x^2 - x = \frac{3}{4}$; e) $4x^2 - 4x - 3 = 5$; f) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 2$.

6*. Znajdź wszystkie pary $(x; y)$ liczb całkowitych spełniające równania:

   a) $x^2 + x + 11 = y^2$; b) $x^2 + x + 41 = y^2$; c) $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

7**. Udowodnij, że jeżeli trójmian $ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość całkowitą dla każdej liczby całkowitej x, to liczby $2a$, $a + b$ i c są całkowite – i na odwrót.

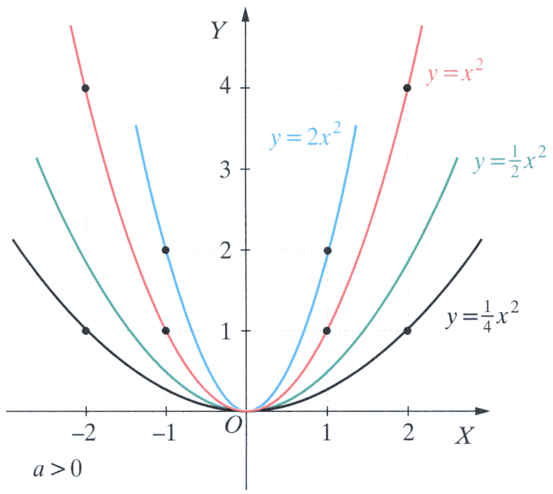
2. Wykres funkcji kwadratowej

Funkcję f określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**.

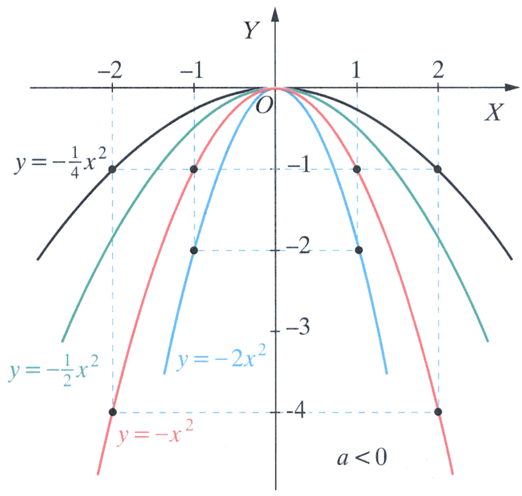
Przykłady funkcji kwadratowych:

1. $f(x)=2x^2$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=-3x^2+1$, $f(x)=2x^2-x-1$.
2. Pole kwadratu jest funkcją kwadratową długości boku; jeśli bowiem bok kwadratu ma długość x, to pole S tego kwadratu wyraża wzór $S(x)=x^2$.
3. Pole koła jest funkcją kwadratową długości jego promienia, ponieważ pole S koła o promieniu długości r obliczamy ze wzoru $S(r)=\pi r^2$.
4. Droga przebyta przez ciało spadające swobodnie w próżni jest funkcją kwadratową czasu spadania; wynika to ze znanego wzoru $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, w którym s oznacza drogę, t – czas, zaś $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ – przyspieszenie ziemskie.

Rozważmy najpierw funkcję kwadratową, której współczynniki b i c są równe zeru, a więc funkcję postaci $f(x)=ax^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Sporządźmy jej wykres dla różnych wartości a (jeśli dysponujesz kalkulatorem graficznym, sporządź wykres za pomocą kalkulatora) – ryciny 1.1 i 1.2.



Ryc. 1.1.



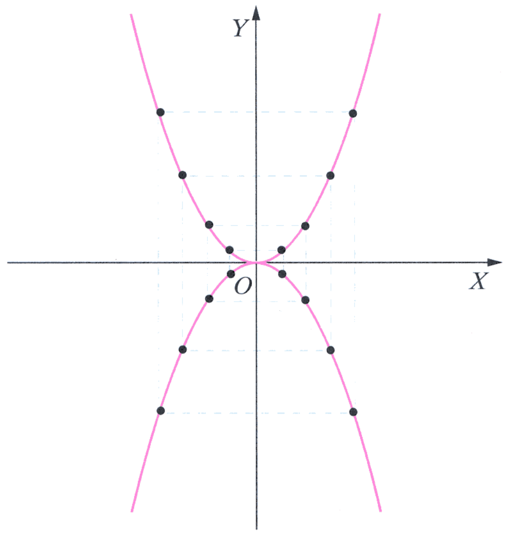
Ryc. 1.2.

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2$ dla $x \in \boldsymbol{R}$, gdzie $a \neq 0$, jest krzywa zwana **parabolą**. Punkt $(0;0)$ nazywamy **wierzchołkiem paraboli**, a dwie części, na które ten punkt dzieli parabolę, jej **ramionami**.

Ryciny 1.1 i 1.2 przedstawiają wykresy funkcji $f(x) = ax^2$, przy $x \in \boldsymbol{R}$, dla różnych wartości współczynnika a (ryc. 1.1 dla $a \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, zaś ryc. 1.2 dla $a \in \left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2\right\}$).

Jak sporządzić wykres każdej z tych funkcji, zapewne pamiętasz z klasy I. Przypomnijmy to sobie krótko. Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = ax^2$, układamy najpierw tabelkę jej zmienności, obierając kilka liczb x i obliczając odpowiadające im wartości ax^2.

Następnie na płaszczyźnie współrzędnych XOY zaznaczamy punkty, które odpowiadają parom $\left(x, ax^2\right)$ wziętym z tabelki. Kilka zaznaczonych w ten sposób punktów łączymy linią i otrzymujemy szkic wykresu funkcji $f(x) = ax^2$. Przyjrzyjmy się temu wykresowi i odczytajmy z niego własności funkcji $f(x) = ax^2$.



Ryc. 1.3.

Widzimy (ryc. 1.3), że jest on symetryczny względem osi OY. Nic w tym dziwnego, przecież dla dowolnego $a \neq 0$ i przeciwnych wartości argumentu funkcja ta przybiera te same wartości:

$$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x),$$

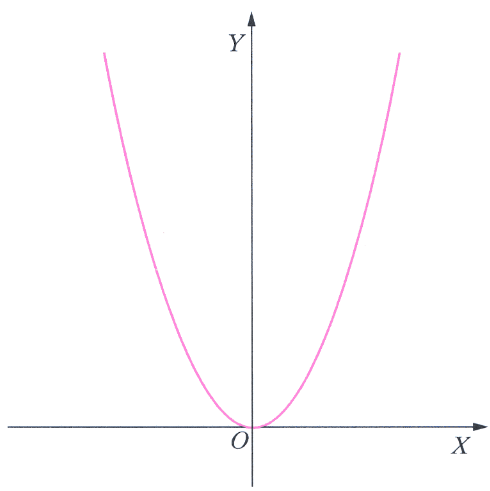
czyli jest ona parzysta.

Dalsze własności będziemy odczytywać dla dwóch przypadków: $a > 0$, $a < 0$.

1. Gdy $a > 0$, to (ryc. 1.4):
   - funkcja $f(x) = ax^2$ przyjmuje stale wartości nieujemne: $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zaś $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$;
   - funkcja $f(x) = ax^2$ przybiera wartości dowolnie duże, byleby tylko $|x|$ była dostatecznie duża; mówimy wtedy, że gdy x dąży do plus nieskończoności lub do minus nieskończoności, wartości funkcji dążą do plus nieskończoności, co zapisujemy następująco:

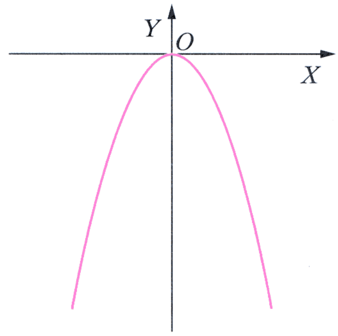
     gdy $x \to \infty$ lub $x \to -\infty$, to $f(x) \to +\infty$;

   (Oznacza to również, że funkcja ta w żadnym punkcie nie osiąga wartości największej. Dla $x = 0$ funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą, równą zeru.)
   - funkcja $f(x) = ax^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$.



Ryc. 1.4.

2. Gdy $a < 0$, to (ryc. 1.5):
   - funkcja $f(x) = ax^2$ przyjmuje stale wartości niedodatnie: $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zaś $f(x) < 0$ dla $x \neq 0$;
   - funkcja $f(x) = ax^2$ przybiera wartości dowolnie małe, gdy tylko $|x|$ jest dostatecznie duża; mówimy wtedy, że gdy x dąży do plus nieskończoności lub do minus nieskończoności, wartości funkcji dążą do minus nieskończoności, co zapisujemy tak:
   gdy $x \to \infty$ lub $x \to -\infty$, to $f(x) \to -\infty$;
   (Oznacza to, że funkcja ta w żadnym punkcie nie osiąga wartości najmniejszej. Dla $x = 0$ funkcja $f(x) = ax^2$ przyjmuje wartość największą, równą zeru.)
   - funkcja $f(x) = ax^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a malejąca w przedziale $(0; +\infty)$.



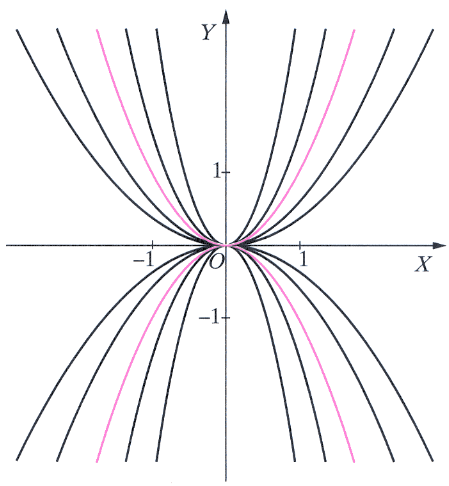
Ryc. 1.5.

Własności funkcji $f(x) = ax^2$ w obu rozważanych przypadkach przedstawiają tabelki:

$f(x)=ax^2, a>0$	
x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$

$f(x)=ax^2, a<0$	
x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$

Przyjrzyjmy się raz jeszcze wykresom funkcji $f(x) = ax^2$ dla różnych wartości $a \neq 0$ (ryc. 1.6). Zauważymy wówczas, że im $|a|$ jest większa, tym ramiona parabol przebiegają bliżej ich wspólnej osi symetrii, im zaś $|a|$ jest mniejsza, tym dalej. Inaczej mówiąc, im $|a|$ jest większa, tym funkcja $f(x) = ax^2$:
- „szybciej” maleje w przedziale $(-\infty; 0)$ i „szybciej” rośnie w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $a > 0$;
- „szybciej” rośnie w przedziale $(-\infty; 0)$ i „szybciej” maleje w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $a < 0$.

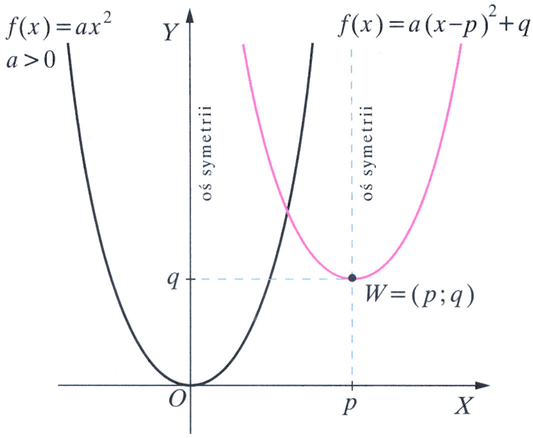


Ryc. 1.6.

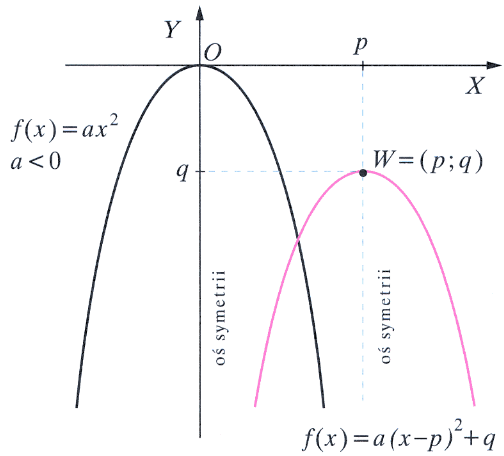
Im zaś $|a|$ jest mniejsza, tym funkcja $f(x) = ax^2$:
- „wolniej” maleje w przedziale $(-\infty; 0)$ i „wolniej” rośnie w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $a > 0$;
- „wolniej” rośnie w przedziale $(-\infty; 0)$ i „wolniej” maleje w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $a < 0$.

Przejdźmy teraz do omówienia wykresu dowolnej funkcji kwadratowej. Wiemy już, że funkcję kwadratową, czyli funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, można sprowadzić do postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$, zwanej, jak pamiętamy, postacią kanoniczną.

Porównując tę funkcję z funkcją kwadratową $g(x) = ax^2$, widzimy, że aby otrzymać wykres funkcji f, wystarczy przesunąć równolegle wykres funkcji g wzdłuż osi OX o p (ryc. 1.7) i wzdłuż osi OY o q (ryc. 1.8) (zobacz rozdz. V, w podręczniku dla klasy I).



Ryc. 1.7.



Ryc. 1.8.

Stąd wyprowadzamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ powstaje z wykresu funkcji $g(x) = ax^2$ w przesunięciu równoległym, w którym punkt $(0;0)$ przechodzi na punkt $(p;q)$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$. Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ jest więc parabolą o wierzchołku $W = (p;q)$.

Przykład 1. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = 2x^2 + 16x + 29$.

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$2x^2 + 16x + 29 =$$
$$= 2\left(x^2 + 8x + 16\right) - 3 =$$
$$= 2(x+4)^2 - 3,$$

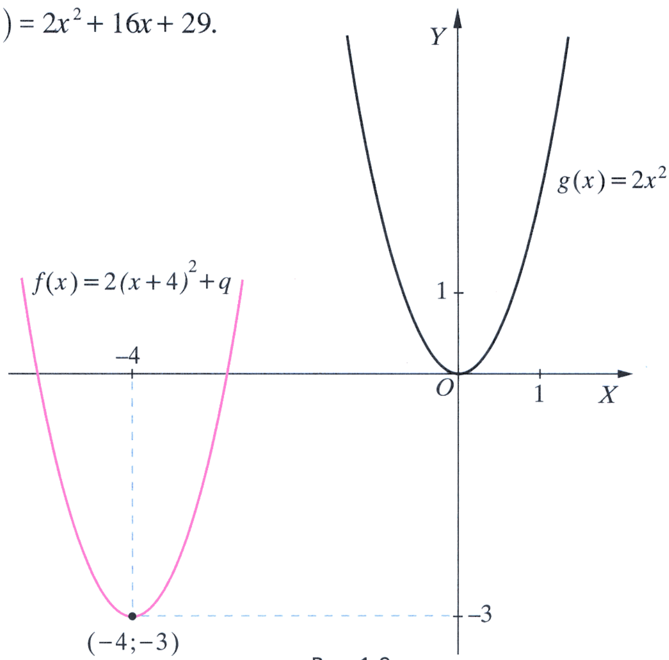
wystarczy więc funkcję:

$$f(x) = 2(x+4)^2 - 3$$

porównać z funkcją:

$$g(x) = 2x^2.$$

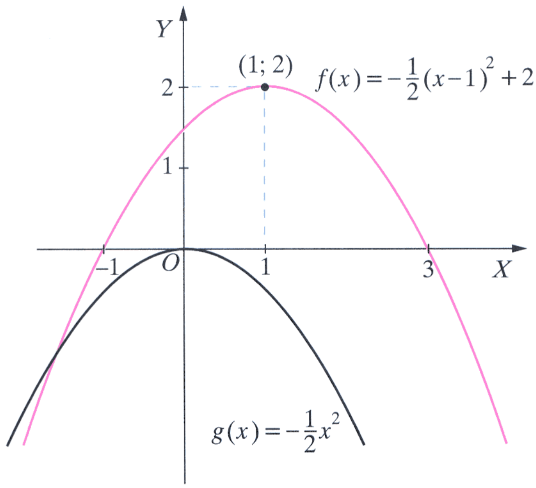
Po przesunięciu wykresu funkcji g wzdłuż osi OX o -4, a wzdłuż osi OY o -3 otrzymamy wykres funkcji f (ryc. 1.9).



Ryc. 1.9.

Przykład 2. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.
Rozwiązanie:
Mamy: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$.

Wystarczy więc porównać funkcję $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ z funkcją $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Po przesunięciu wykresu funkcji g wzdłuż osi OX o 1, a wzdłuż osi OY o 2 otrzymamy wykres funkcji g (ryc. 1.10).



Ryc. 1.10.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja kwadratowa?
2. Podaj przykłady funkcji kwadratowych.
3. Omów własności i wykres funkcji $f(x) = ax^2 \quad (a \neq 0)$.
4. Co jest wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$?
5. Przedstaw w tabelce własności funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.
6. Sporządź wykresy funkcji:
   a) $f(x) = 2x^2 + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$; c) $f(x) = (x-1)^2 - 4$;
   d) $f(x) = x^2 - 6x + 10$; e) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$; f) $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.
7. Napisz wzór funkcji kwadratowej, której wykres otrzymasz:
   a) po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o -1 i wzdłuż osi OY o 3;
   b) po przesunięciu wykresu funkcji $y = -2x^2$ wzdłuż osi OX o 1 i wzdłuż osi OY o -3.
8. Dla jakich wartości a punkt $P = (1; 5)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a(x+1)^2 - 3$?
9. Czy istnieje funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $(1; 1)$ i $(1; 2)$?
10. Dla jakich wartości b i c wykres funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $P = (0; 1)$ i $Q = (1; -1)$?
11. Dla jakich wartości a, b i c wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $P = (0; 8)$, $Q = (2; 0)$, $R = (5; 3)$?

12*. Naszkicuj wykresy funkcji określonych na zbiorze liczb rzeczywistych:

a) $f(x)=|x^2-2x-2|$; b) $f(x)=|-x^2-2x+1|$; c) $f(x)=|x^2+2x|-3$;

d) $f(x)=2x^2-4|x|-1$; e) $f(x)=|x^2-2|x|-2|$; f) $f(x)=(1+|x|)(2-|x|)$.

13. Wykaż, że funkcja $f(x)=ax^2$ jest rosnąca w przedziale $(0;+\infty)$ i malejąca w przedziale $(-\infty;0)$, gdy $a>0$, malejąca zaś w przedziale $(0;+\infty)$ i rosnąca w przedziale $(-\infty;0)$, gdy $a<0$.

14. Omów monotoniczność funkcji $f(x)=a(x-p)^2+q \quad (a\neq 0)$.

15. Wykaż, że funkcja $f(x)=2x^2-4x$ jest malejąca w przedziale $(-\infty;1)$ i rosnąca w przedziale $(1;+\infty)$.

16. Dla jakich wartości m i n funkcje $f(x)=(m+n)x^2+x+n$ i $g(x)=(m-1)x^2+(m+n)x-1$ są równe?

√17*. Wyznacz współczynniki b i c funkcji $f(x)=ax^2+bx+5$, wiedząc, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia ona równanie $f(x+1)-f(x)=8x+3$.

18*. Wyznacz $f(x+1)$, jeśli dla każdego x zachodzi równość $f(x-1)=2x^2-3x+1$.

19**. Wyznacz wszystkie funkcje $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x równanie $2f(x)+f(1-x)=x^2$.

3. Ekstremum funkcji kwadratowej oraz jej wartości: najmniejsza i największa w przedziale

Przyglądając się wykresowi funkcji $f(x)=ax^2 \quad (a\neq 0)$, stwierdziliśmy, że funkcja ta przyjmuje w punkcie $x=0$ wartość równą zeru i że jest to jej wartość najmniejsza, gdy $a>0$, zaś największa, gdy $a<0$. Wynika to również stąd, że:

$ax^2\geqslant 0$ dla każdego x, gdy $a>0$,

$ax^2\leqslant 0$ dla każdego x, gdy $a<0$,

przy czym $ax^2=0$ dla $x=0$.

Porównując tę funkcję z funkcją $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$, gdzie $p=-\frac{b}{2a}$, $q=-\frac{\Delta}{4a}$, otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli $a>0$, to funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$ osiąga w punkcie $x=-\frac{b}{2a}$ wartość **najmniejszą** (minimum) równą $-\frac{\Delta}{4a}$, natomiast nie istnieje jej wartość największa.

Jeżeli $a<0$, to funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$ osiąga w punkcie $x=-\frac{b}{2a}$ wartość **największą** (maksimum) równą $-\frac{\Delta}{4a}$, natomiast nie istnieje jej wartość najmniejsza.

Minimum i maksimum funkcji kwadratowej określamy jako **ekstremum** tej funkcji.

Przykład 1. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x)=2x^2+x+1$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$.
Rozwiązanie:

Sprowadźmy trójmian $2x^2+x+1$ do postaci kanonicznej:

$$2x^2+x+1=2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}+\frac{7}{16}\right)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}.$$

Stąd $f(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$. Widzimy zatem, że funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą równą $\frac{7}{8}$ dla $x=-\frac{1}{4}$.

Przykład 2. Wyznacz największą wartość funkcji $f(x)=-x^2+2x+1$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $-x^2+2x+1=-\left(x^2-2x+1\right)+2=-(x-1)^2+2$, więc $f(x)=-(x-1)^2+2$. Wobec tego funkcja ta osiąga wartość największą równą 2 w punkcie $x=1$.

Przykład 3. Wyznacz współczynniki a, b i c funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$, jeśli wiadomo, że dla $x=-2$ przyjmuje ona wartość najmniejszą równą 4, zaś dla $x=1$ przyjmuje wartość 13.
Rozwiązanie:

Pierwszy sposób:

Z warunków zadania mamy $-\frac{b}{2a}=-2$, $-\frac{\Delta}{4a}=4$ oraz $a+b+c=13$. Rozwiązujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} 4a-b=0 \\ b^2-4ac+16a=0 \\ a+b+c=13. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $b=4a$ i podstawiając do kolejnych równań, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 16a^2-4ac+16a=0 \\ 5a+c=13. \end{cases}$$

Obie strony pierwszego z tych równań dzielimy przez $4a$ $(a\neq 0)$ i dochodzimy do układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi a i c:

$$\begin{cases} 4a-c+4=0 \\ 5a+c=13. \end{cases}$$

Z rozwiązania tego układu wynika, że $a=1$ i $c=8$. Następnie obliczamy $b=4a=4\cdot 1=4$.
Odpowiedź: $a=1$, $b=4$, $c=8$.

Drugi sposób:

Skoro funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą równą 4 dla $x=-2$, więc ma postać $f(x)=a(x+2)^2+4$. Wiemy też, że $f(1)=13$, czyli $a(1+2)^2+4=13$, skąd $a=1$. Wobec tego $f(x)=(x+2)^2+4=x^2+4x+8$, zatem $a=1$, $b=4$, $c=8$.

Przykład 4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=-x^2-3x+10$, gdy $x\in\langle 0;2\rangle$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $-x^2-3x+10=-\left(x^2+3x-10\right)=-\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{49}{4}\right)=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{49}{4}$,

więc funkcja $f(x)=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{49}{4}$ przyjmuje wartość największą równą $\frac{49}{4}$ dla $x=-\frac{3}{2}$.

Nie jest to jej wartość największa w podanym przedziale, gdyż $-\frac{3}{2}\notin\langle 0;2\rangle$. Wartości najmniejszą i największą tej funkcji w podanym przedziale poszukujemy wśród liczb $f(0)$ i $f(2)$. Obliczamy: $f(0)=10$, $f(2)=0$. Zatem najmniejszą wartością danej funkcji w rozważanym przedziale jest 0, a największą 10.

Przykład 5. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=2x^2-x+1$, gdy $x\in\langle -1;1\rangle$.
Rozwiązanie:

Z podanego wzoru funkcji $f(x)=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$ wynika, że osiąga ona w punkcie $x=\frac{1}{4}$ wartość najmniejszą równą $\frac{7}{8}$. Znaleziona wartość jest jej wartością najmniejszą także w przedziale $\langle -1;1\rangle$, gdyż $\frac{1}{4}\in\langle -1;1\rangle$. Wartością największą tej funkcji w przedziale $\langle -1;1\rangle$ jest większa z liczb $f(-1)$ i $f(1)$.

Obliczamy: $f(-1)=4$, $f(1)=2$.

Odpowiedź: Najmniejszą wartością danej funkcji w przedziale $\langle -1;1\rangle$ jest $\frac{7}{8}$, a największą 4.

Przykład 6. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+\frac{1}{2}}$ przyjmuje wartość największą? Wyznacz tę wartość.
Rozwiązanie:

Ponieważ $x^2-x+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$, więc funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Trójmian $x^2-x+\frac{1}{2}$ osiąga wartość najmniejszą równą $\frac{1}{4}$ dla $x=\frac{1}{2}$. Wobec tego największą wartością funkcji f, przyjmowaną w punkcie $x=\frac{1}{2}$, jest 4.

Przykład 7*. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia x^3+y^3, gdy $x+y=1$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $x+y=1$, skąd $y=1-x$,
więc $x^3+y^3=x^3+(1-x)^3=x^3+1-3x+3x^2-x^3=3x^2-3x+1$.

Należy zatem znaleźć najmniejszą wartość trójmianu $3x^2-3x+1$. Sprowadzamy go do postaci kanonicznej:

$$3x^2-3x+1=3\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)=3\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right]=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4},$$

z której można odczytać, że przyjmuje on wartość najmniejszą równą $\frac{1}{4}$ dla $x=\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Najmniejszą wartością wyrażenia x^3+y^3, gdy $x+y=1$, jest $\frac{1}{4}$, dla $x=y=\frac{1}{2}$.

Pytania i zadania

1. Co to jest ekstremum funkcji kwadratowej?
2. Jaki jest związek współczynnika a funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ z jej ekstremum?
3. Wyznacz ekstremum funkcji:

   a) $f(x) = -2x^2 + x - 1$; b) $f(x) = x^2 + 4x - 2$;

   c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$; d) $f(x) = x - x^2$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$.
4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:

   a) $f(x) = x^2 - 6x + 4$, $x \in \langle 1; 4 \rangle$; b) $f(x) = x - x^2$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$;

   c) $f(x) = x^2 - 4x - 2$, $x \in \langle -1; 3 \rangle$; d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $x \in \langle -2; -1 \rangle$.
5. Znajdź trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$, który dla $x = 5$ ma wartość 5, zaś dla $x = 3$ ma minimum równe 1.
6. Wyznacz funkcję kwadratową, której wykres przechodzi przez punkt $P = (3; 0)$ i która w punkcie $x = 1$ osiąga maksimum równe 12.
7. Wyznacz współczynniki funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że osiąga ona minimum równe 5 dla $x = 2$.

8*. Znajdź maksimum xy, jeśli $x + 2y = 1$.

9*. Znajdź minimum $a^3 + b^3 + ab$, jeśli $a + b = 1$.

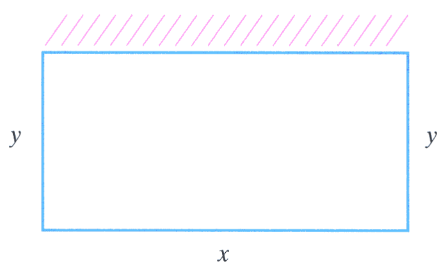
10**. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dla jakiej wartości x suma kwadratów $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ jest najmniejsza?

4. Zadania prowadzące do ekstremum funkcji kwadratowej

Jest wiele zadań, których rozwiązanie polega na znalezieniu ekstremum funkcji kwadratowej. Takimi właśnie zadaniami zajmiemy się obecnie.

Przykład 1. Drucianą siatką długości 200 m należy ogrodzić prostokątną działkę przylegającą do ściany domu. Jakie wymiary powinna mieć działka, aby jej pole było największe?
Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że ogrodzimy działkę o wymiarach jak na rycinie 1.11. Z treści zadania wynika równanie $x + 2y = 200$, gdzie $x > 0$, $y > 0$. Pole tej działki wynosi $x \cdot y$. Należy zatem znaleźć takie liczby dodatnie x i y, aby $x + 2y = 200$ oraz iloczyn $x \cdot y$ był największy. W tym celu wyznaczmy z danego równania x; mamy $x = 200 - 2y = 2(100 - y)$. Oczywiście, aby $x > 0$, musi być $y < 100$ (i oczywiście dodatnie). Podstawiając wyznaczone x do iloczynu $x \cdot y$, otrzymujemy $2(100 - y)y = -2y^2 + 200y$. Zadanie sprowadza się do znalezienia takiego



Ryc. 1.11.

$y \in (0; 100)$, dla którego funkcja kwadratowa $f(y) = -2y^2 + 200y$ osiąga maksimum. Ponieważ $-2y^2 + 200y = -2(y^2 - 2 \cdot 50y + 2500) + 5000 = -2(y-50)^2 + 5000$, więc $f(y)$ przyjmuje wartość największą, równą 5000, dla $y = 50$. Znalezione maksimum funkcji $f(y)$ jest jej maksimum w przedziale $(0; 100)$, gdyż $50 \in (0; 100)$. Podstawiając $y = 50$ do równania $x = 2(100 - y)$, otrzymujemy $x = 100$.

Aby więc działka, którą chcemy ogrodzić drucianą siatką długości 200 m, miała największe pole, powinna być prostokątem o wymiarach 100 m × 50 m.

Przykład 2. Na jakie dwa składniki należy rozłożyć daną liczbę dodatnią a, aby suma ich kwadratów była najmniejsza?

Rozwiązanie:

Oznaczmy jeden z nieznanych nam składników przez x. Drugi jest wówczas równy $a - x$. Sumę kwadratów szukanych składników $x^2 + (a-x)^2$ oznaczmy przez $f(x)$.

Stąd $f(x) = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ jest funkcją kwadratową zmiennej x. Sprowadzając ją do postaci kanonicznej, otrzymujemy:

$$f(x) = 2\left(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2\right) = 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right] \text{ i ostatecznie } f(x) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}.$$

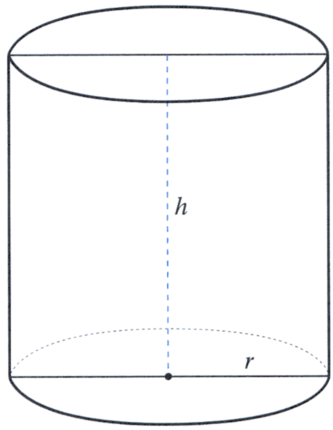
Zatem funkcja ta osiąga minimum równe $\frac{a^2}{2}$ dla $x = \frac{a}{2}$. Daną liczbę dodatnią a należy rozłożyć na dwa równe składniki.

Przykład 3. Który z walców o obwodzie przekroju osiowego równym 100 cm ma największą powierzchnię boczną?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez h i r odpowiednio długość promienia podstawy i wysokości walca o danym obwodzie przekroju osiowego (ryc. 1.12). Z treści zadania wynika równość $2h + 4r = 100$, czyli $h + 2r = 50$. Wyznaczając z niej h i podstawiając do znanego wzoru $S = 2\pi r h$ na pole powierzchni bocznej walca, otrzymujemy funkcję kwadratową zmiennej r:

$$h = 50 - 2r, S = 2\pi r(50 - 2r), \text{czyli } S(r) = -4\pi r^2 + 100\pi r.$$



Ryc. 1.12.

Oczywiście $r \in (0; 25)$, co wynika z warunków zadania.

Należy zatem wyznaczyć takie $r \in (0; 25)$, dla którego funkcja $S(r)$ osiąga maksimum:

$$S(r) = -4\pi r^2 + 100\pi r = -4\pi(r^2 - 25r) =$$

$$= -4\pi\left(r^2 - 2 \cdot \frac{25}{2} r + \frac{625}{4}\right) + 625\pi = -4\pi\left(r - \frac{25}{2}\right)^2 + 625\pi.$$

Stąd $S(r)$ osiąga wartość największą równą 625π, gdy $r = \frac{25}{2}$, a wówczas: $2r = 25$, $h = 50 - 2r = 25$. Przekrój poszukiwanego walca powinien być kwadratem.

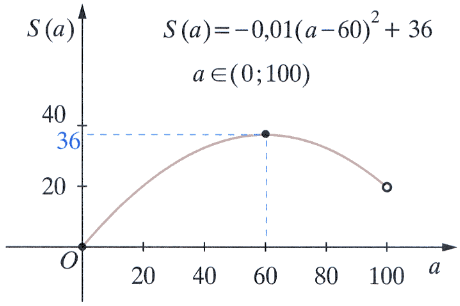
Przykład 4. Roztwór o stężeniu 20% stanowi $a\%$ roztworu dwuskładnikowego, którego pozostałą część stanowi roztwór o stężeniu $a\%$. Wyraź stężenie tego roztworu w zależności od a i zbadaj, kiedy to stężenie jest największe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy stężenie tego dwuskładnikowego roztworu przez s. Z treści zadania otrzymujemy zależność:

$$s = a\cdot\frac{20}{100} + (100 - a)\cdot\frac{a}{100}, \text{ czyli } s = -0{,}01a^2 + 1{,}2a, \text{ gdzie } a \in (0; 100).$$

Należy zatem wyznaczyć takie $a \in (0; 100)$, dla którego funkcja kwadratowa $s(a) = -0{,}01a^2 + 1{,}2a$ osiąga maksimum. Ponieważ jednocześnie $s(a) = -0{,}01(a-60)^2 + 36$ (wykres funkcji $s(a)$ przedstawia ryc. 1.13), to możemy obliczyć, że $s(a)$ przyjmuje wartość największą, równą 36, dla $a = 60$.
Odpowiedź: Stężenie tego roztworu jest największe i wynosi 36%, gdy $a = 60$.



Ryc. 1.13.

Pytania i zadania

1. Liczbę 100 przedstaw jako sumę takich dwóch składników, żeby ich iloczyn był największy.
2. Wykaż, że ze wszystkich prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat.
3. Który ze stożków o obwodzie przekroju osiowego 30 cm ma największe pole powierzchni bocznej?
4. Z kwadratowego arkusza brystolu o boku a chcemy otrzymać prostopadłościenne pudełko. W tym celu musimy wyciąć na rogach równe kwadraciki, a następnie zagiąć brzegi. Jaką długość powinien mieć bok wycinanych kwadracików, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe?
5. Liczbę 1 przedstaw jako sumę takich dwóch składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.
6. Jeden bok danego prostokąta o wymiarach 3×4 powiększamy, a drugi zmniejszamy o x. Dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta będzie największe?
7*. W kulę o promieniu R wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym. Kulę i stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy stożka w odległości x od jego wierzchołka. Na płaszczyźnie tej utworzył się w ten sposób pierścień kołowy, którego okrąg zewnętrzny leży na powierzchni kuli, a wewnętrzny na powierzchni stożka. Dla jakiej wartości x pole tego pierścienia kołowego jest największe?
8*. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku długości s. Na jego bokach $AB, BC, \ldots, FA$ obieramy odpowiednio takie punkty $A_1, B_1, \ldots, F_1$, aby $AA_1 = BB_1 = \ldots = FF_1 = t$.
   a) Udowodnij, że sześciokąt $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ też jest foremny.
   b) Dla jakiej wartości t bok sześciokąta $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ jest najkrótszy?

5. Miejsca zerowe oraz znak funkcji kwadratowej

Miejscami zerowymi funkcji są te argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość zero. Geometrycznie są to odcięte punktów wspólnych wykresu funkcji z osią OX.

Rozważmy więc dowolną funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in R$. Sprowadzając ją do postaci kanonicznej, otrzymujemy:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a},$$

czyli $f(x)=a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$, gdzie $\Delta=b^2-4ac$.

Odpowiemy sobie teraz na pytanie: Kiedy istnieją takie liczby rzeczywiste x, dla których $f(x)=0$?

Przeanalizujemy tutaj trzy przypadki: $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$.

1. Jeśli $\Delta<0$, to $-\Delta>0$, więc wyrażenie $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}$ jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x jako suma liczby nieujemnej $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ i liczby dodatniej $\frac{-\Delta}{4a^2}$. Wobec tego $f(x)=a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ nie przyjmuje wartości zero dla żadnej liczby rzeczywistej x.

2. Jeżeli $\Delta=0$, to:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

i wówczas $f(x)=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad (\text{bo } \ a\neq 0) \iff$

$$\iff x+\frac{b}{2a}=0 \iff x=-\frac{b}{2a}.$$

3. Jeśli $\Delta>0$, to:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].$$

Następnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right),$$

czyli $f(x)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Wobec tego $f(x)=0 \iff \left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \iff$

$$\iff x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \ \vee \ x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \iff$$

$$\iff x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ \vee \ x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in R$:

– nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$;

– ma jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$; jest nim liczba $-\frac{b}{2a}$;

– ma dwa miejsca zerowe, gdy $\Delta > 0$; są nimi liczby $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

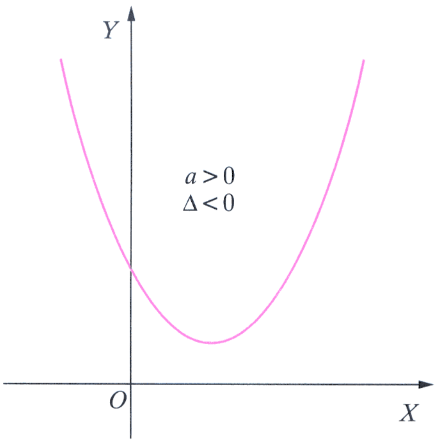
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej nazywamy też jej **pierwiastkami**.

Zauważmy, że gdy $\Delta > 0$, to:

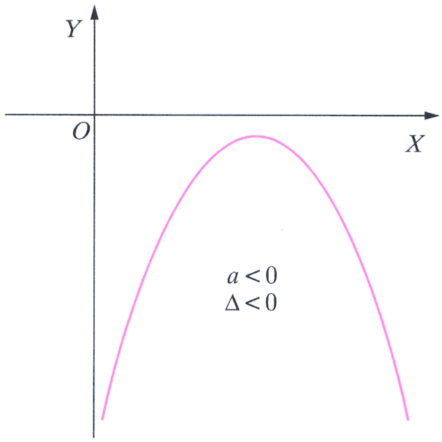
$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $a > 0$, zaś $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} > \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $a < 0$.

Umówmy się, że odtąd zawsze oznaczać będziemy przez x_1 i x_2 odpowiednio mniejszą i większą z liczb $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

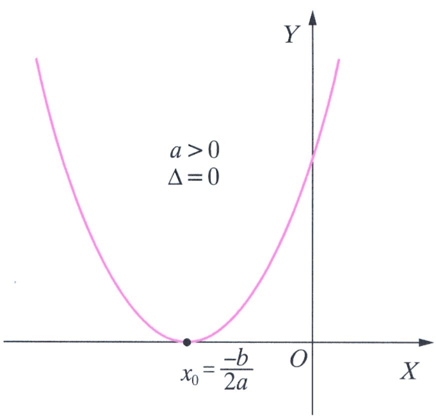
Na rycinach 1.14–1.19 widzimy interpretację geometryczną udowodnionego wyżej twierdzenia.



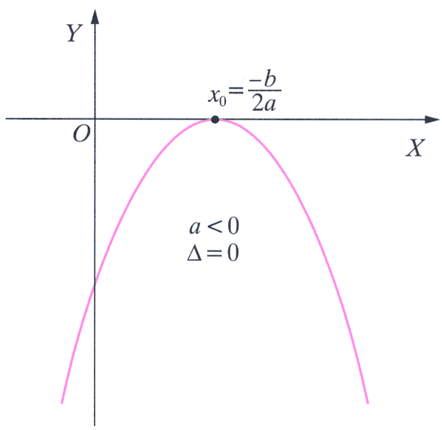
Ryc. 1.14.



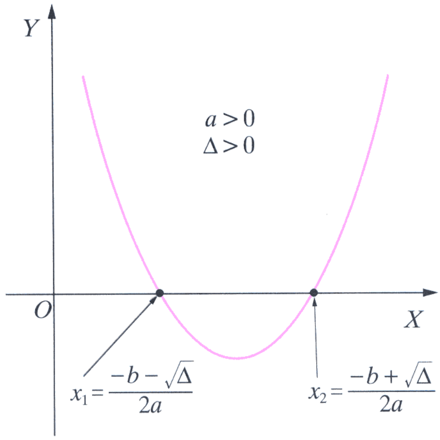
Ryc. 1.15.



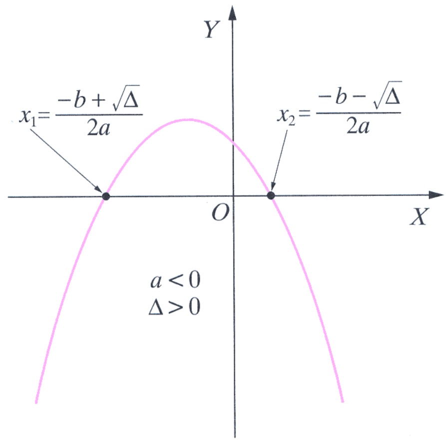
Ryc. 1.16.



Ryc. 1.17.



Ryc. 1.18.



Ryc. 1.19.

Wyznaczając miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, najpierw rozkładaliśmy na czynniki trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$. Z udowodnionego twierdzenia o istnieniu miejsc zerowych funkcji kwadratowej wynika więc kolejne twierdzenie:

Twierdzenie

Trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych a, b, c, gdzie $a \neq 0$, można rozłożyć na czynniki liniowe o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$ lub $\Delta > 0$, przy czym:

1. gdy $\Delta = 0$, to $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$;

2. gdy $\Delta > 0$, to $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to taki rozkład trójmianu kwadratowego nie istnieje.

Równościom występującym w punktach 1 i 2 powyższego twierdzenia możemy nadać jeszcze inną postać, a mianowicie:

1'. $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, gdy $\Delta = 0$;

2'. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdy $\Delta > 0$.

Wzory 1' i 2' pozwalają znaleźć wzór funkcji kwadratowej, gdy znamy jej miejsca zerowe i współczynnik a.

Wzór 1' możemy zapisać podobnie jak wzór 2':

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0)$, gdy $\Delta = 0$.

Widzimy, że czynnik $x - x_0$ powtarza się dwa razy. Wówczas mówimy, że x_0 jest pierwiastkiem dwukrotnym (albo podwójnym) trójmianu kwadratowego.

Przykład 1. Znajdź miejsca zerowe (jeśli istnieją) funkcji kwadratowej $f(x) = 10x^2 + 3x - 4$.
Rozwiązanie:

Wypisujemy współczynniki: $a = 10$, $b = 3$, $c = -4$. Obliczamy wartość Δ, która wynosi: $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4) = 169$, więc $\Delta > 0$, zatem:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 13}{2 \cdot 10} = -\frac{4}{5},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 13}{20} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby: $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Przykład 2. Rozłóż na czynniki trójmian $-3x^2 + x + 2$.
Rozwiązanie:

Mamy: $a = -3$, $b = 1$, $c = 2$.

Obliczamy: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$, skąd:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2 \cdot (-3)} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2 \cdot (-3)} = -\frac{2}{3},$$

zatem:

$$-3x^2 + x + 2 = -3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Teraz zajmiemy się badaniem znaku trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Wyznaczymy przedziały, w których funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest albo dodatnia, albo ujemna.

Zapiszmy ją więc w postaci:

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ i rozważmy iloczyn $a \cdot f(x)$. Zachodzi oczywiście równość:

$$a \cdot f(x) = a^2 \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Wynika z niej, że gdy:

1. $\Delta < 0$, to $a \cdot f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, bo $a^2 > 0$ i $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$, dla $a \neq 0$;
2. $\Delta = 0$, to $a \cdot f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -\frac{b}{2a}$.

Oznacza to, że gdy wyróżnik funkcji kwadratowej jest ujemny, to zachowuje ona stale znak swojego współczynnika a, bowiem:

$$a \cdot f(x) > 0 \iff (a > 0 \ \text{ i } \ f(x) > 0) \vee (a < 0 \ \text{ i } \ f(x) < 0).$$

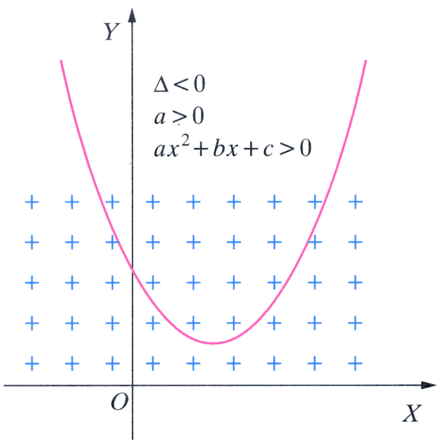
Gdy wyróżnik funkcji kwadratowej jest równy zeru, to $a \cdot f(x) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, przy czym $a \cdot f(x) > 0$ dla każdego $x \neq -\frac{b}{2a}$, zaś $a \cdot f(x) = 0$ dla $x = -\frac{b}{2a}$; stąd $f(x) = 0$, gdy $x = -\frac{b}{2a}$, bo $a \neq 0$.

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

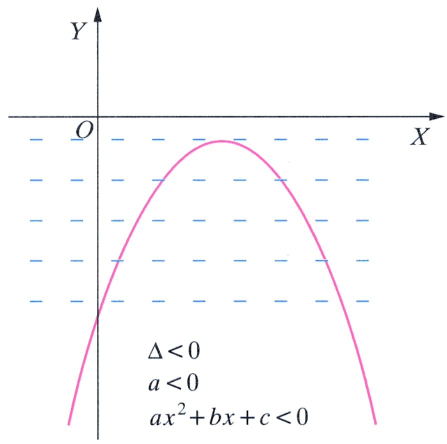
Twierdzenie

1. Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest:
   – stale dodatnia, gdy $a > 0$,
   – stale ujemna, gdy $a < 0$.
2. Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest:
   – stale nieujemna, gdy $a > 0$,
   – stale niedodatnia, gdy $a < 0$.

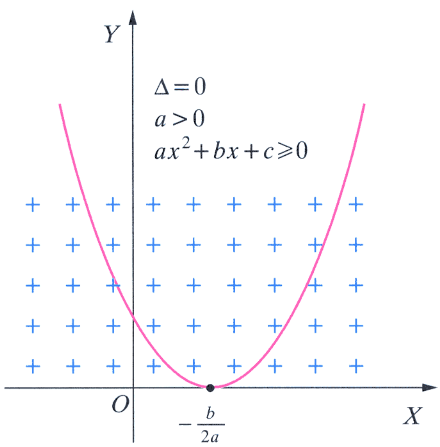
Zależności te można zaobserwować na wykresie funkcji kwadratowej (ryc. 1.20–1.23).



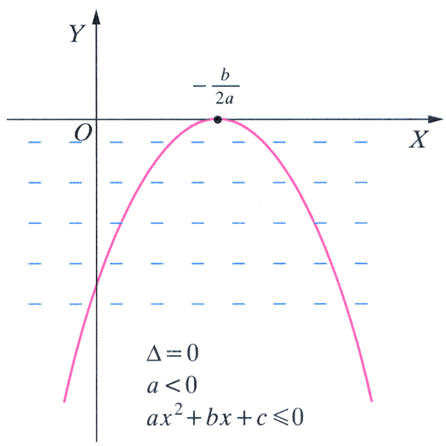
Ryc. 1.20.



Ryc. 1.21.



Ryc. 1.22.



Ryc. 1.23.

Rozpatrzmy na koniec przypadek, gdy $\Delta > 0$. Wtedy funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, gdzie:

$$(*)\ x_1 = \min\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\},\ x_2 = \max\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

i możemy ją zapisać w postaci $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi wtedy równość $a \cdot f(x) = a^2(x-x_1)(x-x_2)$. Teraz widzimy, że:

$$a \cdot f(x) > 0 \iff a^2(x-x_1)(x-x_2) > 0 \iff (x-x_1)(x-x_2) > 0, \text{ bo } a^2 > 0.$$

Ale $(x-x_1)(x-x_2) > 0 \iff (x-x_1 > 0 \ \text{ i } \ x-x_2 > 0)$ lub

$$(x-x_1 < 0 \ \text{ i } \ x-x_2 < 0) \iff (x > x_1 \ \text{ i } \ x > x_2), \text{ lub } (x < x_1 \ \text{ i } \ x < x_2).$$

Wobec tego, zgodnie z przyjętymi wzorami (∗), otrzymujemy ostatecznie, że:

$$a \cdot f(x) > 0, \text{ gdy } x < x_1 \text{ lub } x > x_2.$$

Rozstrzygnijmy teraz, kiedy $a \cdot f(x) < 0$. Otóż:

$$a \cdot f(x) < 0 \iff a^2(x-x_1)(x-x_2) < 0 \iff (x-x_1)(x-x_2) < 0 \iff$$

$$\iff (x-x_1 > 0 \ \text{ i } \ x-x_2 < 0) \text{ lub}$$

$$(x-x_1 < 0 \ \text{ i } \ x-x_2 > 0) \iff x-x_1 > 0 \ \text{ i } \ x-x_2 < 0,$$

bo nierówności $x-x_1 < 0$ i $x-x_2 > 0$ nie mogą zachodzić jednocześnie (dlaczego?).

Ostatecznie więc:

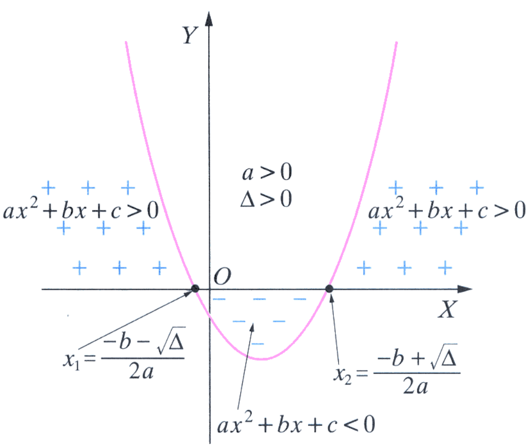
$$a \cdot f(x) < 0 \iff x_1 < x < x_2.$$

W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie:

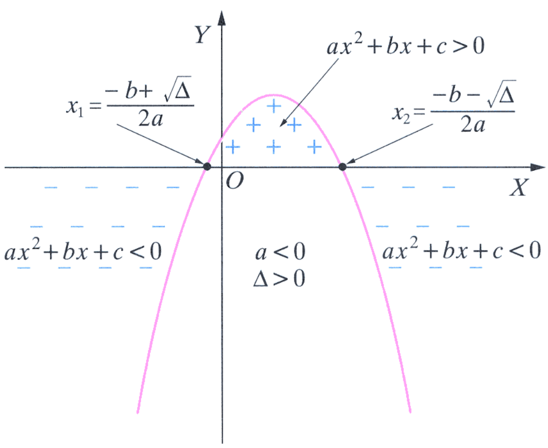
Twierdzenie

Jeżeli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \boldsymbol{R}$, ma dwa miejsca zerowe, to:
- zachowuje znak swojego współczynnika a (tzn. jest dodatnia, gdy $a > 0$, lub ujemna, gdy $a < 0$) poza swoimi miejscami zerowymi;
- ma znak przeciwny do znaku współczynnika a (tzn. jest dodatnia, gdy $a < 0$, lub ujemna, gdy $a > 0$) między swoimi miejscami zerowymi.

Ryciny 1.24 i 1.25 przedstawiają interpretację geometryczną tego twierdzenia.



Ryc. 1.24.



Ryc. 1.25.

Przykład 3. Dla jakich x funkcja $f(x) = x^2 - 5x + 6$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich x wartości ujemne?
Rozwiązanie:

Wypisujemy współczynniki: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Obliczamy: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$.

Znajdujemy pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2 \cdot 1} = 2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2 \cdot 1} = 3.$$

Ponieważ $a > 0$, więc:

$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in (2; 3)$.

Przykład 4. Dla jakich x funkcja $f(x) = -3x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich x wartości ujemne?
Rozwiązanie:

Mamy: $a = -3$, $b = 4$, $c = 4$.

Obliczamy: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 64$, następnie pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{2 \cdot (-3)} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-8}{2 \cdot (-3)} = 2.$$

Ponieważ $a < 0$, więc:

$f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right)$,

$f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Przykład 5. Wykaż, że jeżeli $a \cdot c < 0$, to trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.
Rozwiązanie:

Ponieważ $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4 \cdot (-ac) > 0$, więc trójmian ten ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Przykład 6*. Udowodnij, że jeżeli $a > 0$ i $b > a + c$, to trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.
Rozwiązanie:

Wykażemy, że $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Jeśli $c < 0$, to oczywiście $-c > 0$ i wtedy $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4a \cdot (-c) > 0$.

Gdy zaś $c \geqslant 0$, wówczas $a + c > 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geqslant 0$, więc $\Delta > 0$.

Pytania i zadania

1. Kiedy trójmian kwadratowy:
   a) nie ma pierwiastków rzeczywistych,
   b) ma jeden pierwiastek rzeczywisty,
   c) ma dwa pierwiastki rzeczywiste?
2. Co to jest postać iloczynowa funkcji kwadratowej? Czy każdy trójmian kwadratowy o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynowej?
3. Podaj wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c.
4. Kiedy trójmian kwadratowy ax^2+bx+c ma stały znak w zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych?
5. Wykonaj szkic wykresu funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ.
6. Określ liczbę pierwiastków każdego z trójmianów określonych w zbiorze $\boldsymbol{R}$:
   a) $2x^2-3x+7$; b) $10x^2+3x-4$; c) $-x^2+2x+1$;
   d) $4x^2+x-3$; e) $-2x^2-4x-2$; f) $2x^2-2\sqrt{2}\,x+1$.
7. Przedstaw w postaci iloczynowej następujące trójmiany:
   a) $3x^2-3x-6$; b) $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$; c) $-x^2+x+20$;
   d) $-3x^2+x+2$; e) $2x^2+0{,}5x-0{,}25$; f) $x^2-6x-16$.
8. Napisz wzór trójmianu kwadratowego, którego pierwiastkami są liczby:
   a) $x_1=-2,\ x_2=3$; b) $x_1=1,\ x_2=4$; c) $x_0=-3$;
   d) $x_1=0,\ x_2=4$; e) $x_1=2-\sqrt{2},\ x_2=2+\sqrt{2}$; f) $x_1=\sqrt{2}-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
9. Wyznacz przedziały, w których następujące funkcje kwadratowe mają stały znak:
   a) $f(x)=x^2+2x-3$; b) $f(x)=-x^2+x-5$; c) $f(x)=x^2-3x+2$;
   d) $f(x)=-2x^2+5x-3$; e) $f(x)=-5x^2+7x-3$; f) $f(x)=3x^2-5x-2$.

10*. Określ znak współczynnika c trójmianu ax^2+bx+c, jeśli wiesz, że $a+b+c<0$ i trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych.

11*. Udowodnij, że jeżeli każdy z trójmianów $x^2+2ax+b^2$ i $x^2+2bx+c^2$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, to trójmian $x^2+2cx+a^2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

12*. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:
$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$
ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

13*. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie oraz $a+b+c<12$, to co najmniej jeden z trójmianów kwadratowych x^2+ax+b, x^2+bx+c, x^2+cx+a nie ma pierwiastków rzeczywistych.

6. Wzory Viète'a

Wzorami Viète'a nazywamy związki, w jakich pozostają miejsca zerowe (pierwiastki) funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i jej współczynniki a, b, c. Wykażemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami funkcji kwadratowej:

$$(*)\ f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równości:

1. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,
2. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

☐ Dowód. Załóżmy, że x_1 i x_2 są pierwiastkami funkcji kwadratowej $(*)$. Zatem:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (lub na odwrót), gdzie } \Delta \geqslant 0.$$

I wtedy rzeczywiście:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \text{ oraz:}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

czyli zachodzą równości 1 i 2.

Załóżmy, że są spełnione równości 1 i 2. Wówczas $b = -a\left(x_1 + x_2\right)$ i $c = ax_1x_2$. Po podstawieniu tych wartości do wzoru $(*)$ otrzymamy $f(x) = ax^2 - a\left(x_1 + x_2\right)x + ax_1x_2$.

Teraz widzimy, że:

$$f\left(x_1\right) = ax_1^2 - a\left(x_1 + x_2\right)x_1 + ax_1x_2 = 0 \text{ oraz}$$

$$f\left(x_2\right) = ax_2^2 - a\left(x_1 + x_2\right)x_2 + ax_1x_2 = 0. \ \square$$

Tak więc, gdy:

1. $\Delta > 0$, to $x_1 \neq x_2$ oraz $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$;
2. $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2 = x_0$ oraz $2x_0 = -\frac{b}{a}$, $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Wzory Viète'a służą do znajdowania pierwiastków trójmianu kwadratowego, jak również do badania ich znaku. Przy założeniu, że $\Delta \geqslant 0$ i $x_1 \leqslant x_2$, z własności liczb rzeczywistych wynika:

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \iff x_1 < 0 \text{ i } x_2 > 0,$$

$$\left(x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0\right) \iff \left(x_1 > 0 \text{ i } x_2 > 0\right),$$

$$\left(x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 < 0\right) \iff \left(x_1 < 0 \text{ i } x_2 < 0\right).$$

Przykład 1. Znajdź pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x - 6$.
Rozwiązanie:

Wypisujemy współczynniki: $a = 1$, $b = -5$, $c = -6$.

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = -6$.

Następnie szukamy w pamięci rozkładów liczby -6 na iloczyn dwóch liczb, których suma jest równa 5: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Przykład 2. Określ znaki pierwiastków rzeczywistych trójmianu $3x^2 - 12x + 2$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, więc pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 tego trójmianu istnieją i są różne. Ze wzorów Viète'a wynika, że:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{12}{3} = 4 > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0.$$

Stąd $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

Przykład 3. Nie obliczając pierwiastków x_1 i x_2 trójmianu $x^2 - x - 6$, wyznacz wartości wyrażeń:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; b) $x_1^2 + x_2^2$; c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

e) $x_1^3 + x_2^3$; f) $(x_1 - x_2)^2$; g) $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$; h) $x_1^4 + x_2^4$.

Rozwiązanie:

Ze wzorów Viète'a mamy $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = -6$. Wobec tego:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$;

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-6) = 1 + 12 = 13$;

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{13}{(-6)^2} = \frac{13}{36}$;

d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{13}{-6} = -\frac{13}{6}$;

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1^3 - 3 \cdot (-6) \cdot 1 = 1 + 18 = 19$;

f) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$;

g) $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = (x_1^2 + x_2^2) - 10(x_1 + x_2) + 50 = 13 - 10 + 50 = 53$;

h) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = 13^2 - 2 \cdot (-6)^2 = 169 - 72 = 97$.

Pytania i zadania

1. Podaj wzory Viète'a.
2. Korzystając ze wzorów Viète'a, znajdź pierwiastki rzeczywiste (jeśli istnieją) trójmianów:

   a) $x^2 - 5x + 4$; b) $-x^2 + x + 6$; c) $x^2 + 7x + 10$; d) $2x^2 + x - 1$.

3. Nie obliczając pierwiastków trójmianów, określ znaki tych pierwiastków:

   a) $3x^2 + 7x + 3$; b) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1$; c) $-4x^2 + 3x - 1$;

   d) $7x^2 + 3x + 4$; e) $-x^2 - 5x + 3$; f) $x^2 - 4x - 6$.

4. Wyznacz drugi pierwiastek trójmianu, gdy jeden jest dany:

   a) $x^2 + 3x - 4$, $x_2 = 1$; b) $2x^2 + 5x + 3$, $x_1 = -\frac{3}{2}$;

   c) $2x^2 + 3x - 2$, $x_1 = -2$; d) $-3x^2 + 2x + 5$, $x_1 = -1$.

5*. Wyznacz trójmian kwadratowy, którego suma pierwiastków jest równa 5, a iloczyn jest równy 4.

6. Wyznacz współczynniki p i q trójmianu $x^2 + px + q$, którego pierwiastkami są liczby:

   a) $8, -9$; b) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$; c) $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$; d) $3, \frac{1}{3}$.

7. Nie obliczając pierwiastków x_1 i x_2 trójmianu $x^2 + 3x - 4$, wyznacz wartości wyrażeń:

   a) $|x_1 - x_2|$; b) $x_1^2 - x_2^2$; c) $x_1^3 - x_2^3$;

   d) $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2}$; e) $x_1^3 + x_2^3 + 3\left(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3\right) + 6\left(x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3\right)$; f) $x_1^4 - x_2^4$.

8*. Udowodnij, że jeżeli stosunek pierwiastków x_1 i x_2 trójmianu $ax^2 + bx + c$ wynosi $\frac{k}{k+1}$, to jego współczynniki a, b i c spełniają warunek $\frac{ac}{b^2} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}$.

√ 9**. Wykaż, że jeżeli pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + (b+1)$ są liczbami naturalnymi, to suma $a^2 + b^2$ jest liczbą złożoną.

10*. Udowodnij, że jeżeli pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu $x^2 - ax + a$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, są liczbami rzeczywistymi, to $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2(x_1 + x_2)$.

11*. Dane są trójmiany $x^2 + px + q$ i $qx^2 + mqx + 1$, których współczynniki m, p, q są liczbami rzeczywistymi, przy czym $q > 0$. Udowodnij, że jeżeli pierwiastkami tych trójmianów są odpowiednio liczby x_1, x_2 i $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$, to $mp \geqslant 4$.

12**. Dane są trójmiany $x^2 + px + 1$ i $x^2 + qx + 1$, których pierwiastkami są odpowiednio liczby x_1 i x_2 oraz x_3 i x_4. Udowodnij, że:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = q^2 - p^2.$$

13**. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu:

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, gdzie $p \in \mathbf{R}$ i $p \neq 0$, to $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

7. Równania i nierówności kwadratowe

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, w którym x jest niewiadomą, $a \neq 0$, b i c zaś są to liczby dane, nazywamy **równaniem kwadratowym** lub **równaniem drugiego stopnia**.

Równaniem kwadratowym nazywamy też każde równanie równoważne równaniu kwadratowemu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

Rozwiązać równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ oznacza znaleźć miejsca zerowe trójmianu $ax^2 + bx + c$. Z przeprowadzonej w poprzednim podrozdziale dyskusji istnienia miejsc zerowych (pierwiastków) trójmianu kwadratowego wynika więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Istnienie i liczba rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, zależy od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. jeżeli $\Delta < 0$, rozwiązaniem tego równania nie jest żadna liczba rzeczywista;
2. jeżeli $\Delta = 0$, równanie to ma jedno rozwiązanie (tzw. pierwiastek podwójny lub dwukrotny):
$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$
3. jeżeli $\Delta > 0$, równanie to ma dwa rozwiązania (zwane też pierwiastkami); są nimi liczby:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$x^2 + 3x + 4 = 0.$

Rozwiązanie:

Obliczamy: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$. Ponieważ $\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład 2. Rozwiąż równanie:

$-x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2 = 0.$

Rozwiązanie:

$\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 8 - 8 = 0$, dlatego równanie to ma jedno rozwiązanie podwójne; jest nim liczba $x_0 = \frac{-2\sqrt{2}}{2 \cdot (-1)} = \sqrt{2}$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie:

$x^2 - x - 20 = 0.$

Rozwiązanie:

Obliczamy: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste; są nimi liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 9}{2} = -4,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 9}{2} = 5.$$

W przypadku, gdy $b \neq 0$ i $c \neq 0$, równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nazywa się **równaniem kwadratowym zupełnym** i rozwiązujemy je, korzystając ze wzorów na pierwiastki albo ze wzorów Viète'a. Gdy zaś $b = 0$ lub $c = 0$, równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma postać $ax^2 + c = 0$ lub $ax^2 + bx = 0$, lub $ax^2 = 0$ i nazywa się **równaniem kwadratowym niezupełnym**. Na ogół równanie takie rozwiązujemy, rozkładając jego lewą stronę na czynniki.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $3x^2 - 27 = 0$.
Rozwiązanie:
Ponieważ $3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3(x+3)(x-3)$, więc $3x^2 - 27 = 0 \iff x + 3 = 0$ lub $x - 3 = 0 \iff x = -3$, lub $x = 3$. Zatem $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $2x^2 - 4x = 0$.
Mamy: $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$, więc $2x^2 - 4x = 0 \iff x = 0$ lub $x - 2 = 0 \iff x = 0$, lub $x = 2$. Stąd $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$.
Rozwiązanie:
Ponieważ $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2}\,x \cdot 1 + 1^2 = \left(\sqrt{2}\,x - 1\right)^2$, więc
$2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0 \iff \left(\sqrt{2}\,x - 1\right)^2 = 0 \iff \sqrt{2}\,x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Równanie to ma więc jeden pierwiastek podwójny: $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Równania dwukwadratowe

Są to równania postaci $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, zaś $n \geqslant 2$ i jest liczbą całkowitą, które sprowadza się do równania kwadratowego przez podstawienie $t = x^n$. Otrzymane równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$ rozwiązujemy:
– w liczbach rzeczywistych nieujemnych, gdy $2 \mid n$,
– w liczbach rzeczywistych, gdy $2 \nmid n$,
i uzyskane w ten sposób rozwiązanie podstawiamy do równania, uzyskując rozwiązania równania dwukwadratowego.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
Rozwiązanie:
Podstawiamy $x^2 = t$ i przechodzimy do równania kwadratowego $t^2 - 5t + 4 = 0$. Rozwiązujemy je i uzyskujemy: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Podstawiając te wartości do poprzedniego równania, otrzymujemy alternatywę dwóch równań kwadratowych niezupełnych:

$x^2 = 1$ lub $x^2 = 4$, a stąd $x = -1$ lub $x = 1$, lub $x = -2$, lub $x = 2$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania dwukwadratowego są liczby:
$x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $x^6 + x^3 - 2 = 0$.
Rozwiązanie:
Podstawiając $x^3 = t$, otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2 + t - 2 = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Podstawiając uzyskane wartości do równania, otrzymujemy alternatywę równań $x^3 = -2$ lub $x^3 = 1$, skąd $x = -\sqrt[3]{2}$ lub $x = 1$.
Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x_1 = -\sqrt[3]{2}$, $x_2 = 1$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\left(x^2-16x\right)^2-2\left(x^2-16x\right)-63=0$.
Rozwiązanie:

Podstawiamy $x^2-16x=t$ i otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2-2t-63=0$, którego rozwiązaniami są liczby $t_1=-7$, $t_2=9$. Podstawiając te liczby do poprzedniego równania, otrzymujemy alternatywę równań:

$x^2-16x=-7$ lub $x^2-16x=9$, czyli równań:

$x^2-16x+7=0$ lub $x^2-16x-9=0$.

Rozwiązując każde z nich, otrzymujemy ostatecznie odpowiedź, że rozwiązaniami danego równania są liczby: $x_1=8-\sqrt{73}$, $x_2=8-\sqrt{57}$, $x_3=8+\sqrt{57}$, $x_4=8+\sqrt{73}$.

Nierówności kwadratowe

!

Każdą z nierówności o postaci: $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c<0$ lub $ax^2+bx+c\leqslant 0$, w których x jest niewiadomą, $a\neq 0$, zaś b i c są to liczby dane, nazywamy **nierównością kwadratową** lub **nierównością drugiego stopnia**.

Rozwiązać nierówność kwadratową oznacza: wyznaczyć przedziały, w których trójmian kwadratowy, będący lewą stroną nierówności, ma odpowiedni stały znak. Dlatego nierówności kwadratowe wygodnie jest rozwiązywać, korzystając z wykresów ilustrujących zmienność trójmianu kwadratowego albo z twierdzenia o znaku trójmianu kwadratowego.

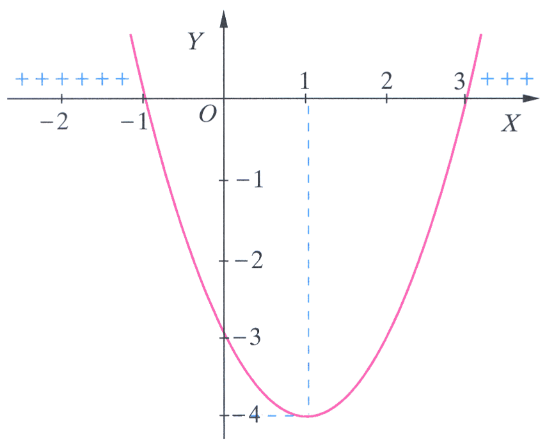
Przykład 1. Rozwiąż nierówność:

$x^2-2x-3>0$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a=1>0$, $\Delta=16$, $x_1=-1$, $x_2=3$, więc $x^2-2x-3>0 \iff x<-1$ lub $x>3$ (ryc. 1.26).

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.



Ryc. 1.26.

Przykład 2. Rozwiąż nierówność:

$2x^2+9>(x-4)^2+14x$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną nierówność na nierówność jej równoważną:

$x^2-6x-7>0$.

Obliczamy: $\Delta=36+28=64$,

$x_1=-1$, $x_2=7$.

Ponieważ $a>0$ i $\Delta>0$, więc trójmian x^2-6x-7 jest dodatni (zachowuje znak współczynnika a) poza pierwiastkami, czyli dla $x<-1$ lub $x>7$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $(3x-1)^2-4(x-2)^2 \leqslant 0$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $(3x-1)^2-4(x-2)^2=(3x-1)^2-(2x-4)^2=$
$=(3x-1-2x+4)(3x-1+2x-4)=(x+3)(5x-5)=5(x+3)(x-1)$, więc:
$(3x-1)^2-4(x-2)^2 \leqslant 0 \iff 5(x+3)(x-1) \leqslant 0$.

Pierwiastkami funkcji kwadratowej $f(x)=5(x+3)(x-1)$ (danej w postaci iloczynowej!) są liczby $x_1=-3$, $x_2=1$, zaś współczynnik a przy x^2 wynosi 5 (jest zatem dodatni). Wobec tego funkcja ta jest przeciwnego znaku do znaku współczynnika przy x^2 między pierwiastkami. Stąd $5(x+3)(x-1) \leqslant 0 \iff x \in \langle -3; 1\rangle$.
Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest przedział $\langle -3; 1\rangle$.

Pytania i zadania

1. Co to jest równanie kwadratowe?
2. Omów sposób rozwiązywania równań kwadratowych.
3. Co to są równania kwadratowe niezupełne i jak je rozwiązujemy?
4. Co to jest równanie dwukwadratowe i w jaki sposób się je rozwiązuje?
5. Co to jest nierówność kwadratowa?
6. Omów sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych.
7. Rozwiąż równania:

   a) $x^2-9x-22=0$; b) $x^2+x-30=0$; c) $x^2-8x+15=0$;
   d) $3x^2+10x+3=0$; e) $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{5}x-\frac{6}{5}=0$; f) $\frac{3}{4}x^2-5x+8=0$.
8. Rozwiąż równania:

   a) $x^2-9=0$; b) $-2x^2+6x=0$; c) $\frac{1}{2}x^2+1=0$;
   d) $8-\frac{1}{2}x^2=0$; e) $x+x^2=0$; f) $2-x^2=0$;
   g) $\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}x=0$; h) $7x^2+0{,}2x=0$; i) $13x+7x^2=5x^2+15x$.
9. Rozwiąż równania:

   a) $x(x+2)=3(x+2)$; b) $x^2+x(x-2)=0$; c) $(3x-4)^2=16-9x^2$;
   d) $(3x-2)^2=7(3x-2)$; e) $(x-4)^2=25$; f) $(x+4)^2=(x+4)(2x+1)$.
10. Rozwiąż równania:

    a) $x^4-10x^2+9=0$; b) $x^6+5x^3+4=0$; c) $x^4-2x^2+1=0$;
    d) $4x^4-25x^2+6=0$; e) $(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12=0$.
11. Rozwiąż nierówności:

    a) $-x^2+3x-2<0$; b) $\sqrt{3}\,x^2-4x+\sqrt{3} \geqslant 0$; c) $x^2 \leqslant -4(x+1)$;
    d) $x^2-x \leqslant \frac{x}{2}+1$; e) $x^2-8x+12<0$; f) $(3x-2)^2<9$.

12. Rozwiąż nierówności:

a) $-6x^2+5x-1>0$; b) $3x^2-12x+25>0$; c) $2x^2-3x-2\leqslant 0$;

d) $2x(x-10)\geqslant 4(x-8)$; e) $5(x+1)<x(3-x)$; f) $\frac{1}{x^2+5x+4}>0$.

13. Rozwiąż równania:

a) $|x^2-1|=1$; b) $|x^2-4|=4$; c) $|x^2-9|+|x^2-4|=9$;

d) $x^2-5|x|+4=0$; e) $x^2-4x+|x-3|+3=0$; f) $x|4-x|=3$.

14*. Udowodnij, że równania $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+c=0$.

15**. Niech $S_m=x_1^m+x_2^m$, gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$. Udowodnij, że $a\cdot S_m+b\cdot S_{m-1}+c\cdot S_{m-2}=0$.

16**. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków dowolnego trójkąta, to równanie $b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

8. Zadania z parametrem

Parametrem nazywamy literę oznaczającą w zadaniu liczbę daną. Na ogół jest to jedna z początkowych lub środkowych liter alfabetu. Właśnie zadaniom z parametrem poświęcimy ten podrozdział.

8.1. Równania kwadratowe z parametrem

Przykład 1. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2-2x+m-4=0$:

a) ma dwa pierwiastki rzeczywiste,

b) ma jeden pierwiastek rzeczywisty,

c) nie ma pierwiastków rzeczywistych?

Rozwiązanie:

Równanie to jest równaniem kwadratowym zmiennej x dla każdego m, stąd liczba jego pierwiastków rzeczywistych zależy tylko od znaku wyróżnika Δ. Obliczmy ten wyróżnik:

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(m-4)=4-4(m-4)=4(5-m).$$

Widzimy więc, że $\Delta>0$, gdy $m<5$; $\Delta=0$, gdy $m=5$; $\Delta<0$, gdy $m>5$.

Zatem równanie to:

a) ma dwa pierwiastki rzeczywiste dla $m<5$,

b) ma jeden pierwiastek rzeczywisty dla $m=5$,

c) nie ma pierwiastków rzeczywistych dla $m>5$.

Przykład 2. Dla jakich wartości m równanie $(m-1)x^2-2mx+m=0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste?

Rozwiązanie:

Gdy $m=1$, równanie to jest równoważne równaniu $-2x+1=0$, które ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, zatem musi być $m\neq 1$. Dane równanie jest wtedy kwadratowe i badamy znak jego wyróżnika Δ.

Mamy:

$\Delta = (-2m)^2 - 4(m-1)m = 4m^2 - 4m^2 + 4m = 4m.$

Widzimy więc, że $\Delta > 0 \iff m > 0$ i $m \neq 1$.

Odpowiedź: Równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste, gdy $m > 0$ i $m \neq 1$.

Przykład 3. Dla jakich wartości parametru k pierwiastki rzeczywiste równania $x^2 + 2(3k-1)x + 3k + 11 = 0$ są liczbami przeciwnych znaków?

Rozwiązanie:

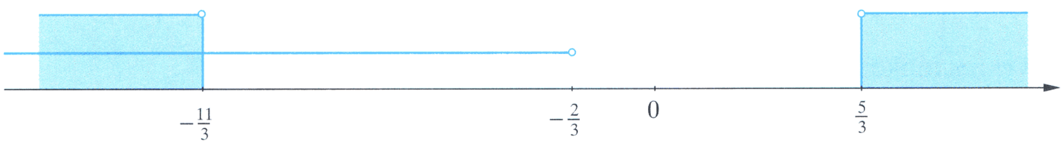
Sprawdzamy najpierw, kiedy to równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste. Obliczamy wyróżnik Δ:

$\Delta = \left(2(3k-1)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3k+11) = 36k^2 - 24k + 4 - 12k - 44 = 4\left(9k^2 - 9k - 10\right).$

Wobec tego $\Delta > 0 \iff 9k^2 - 9k - 10 > 0.$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową $9k^2 - 9k - 10 > 0$ i otrzymujemy $k < -\frac{2}{3}$ lub $k > \frac{5}{3}$. Pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 tego równania będą liczbami przeciwnymi, jeśli ich iloczyn będzie ujemny. Ze wzorów Viète'a wynika, że $x_1 \cdot x_2 = 3k + 11$, więc $x_1 \cdot x_2 < 0 \iff 3k + 11 < 0 \iff k < -\frac{11}{3}$.

Przedstawmy otrzymane wyniki na osi liczbowej:



Ryc. 1.27.

Widzimy, że warunki zadania będą spełnione, gdy $k < -\frac{11}{3}$.

Odpowiedź: Pierwiastki rzeczywiste danego równania są przeciwnych znaków dla $k \in \left(-\infty; -\frac{11}{3}\right)$.

Przykład 4. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste należące do przedziału $\langle -2; 4 \rangle$?

Rozwiązanie:

Ponieważ $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(m^2 - 1\right) = 4m^2 - 4m^2 + 4 = 4$, więc równanie to ma dwa pierwiastki rzeczywiste dla każdego m. Są nimi liczby $x_1 = m - 1$ i $x_2 = m + 1$. Oczywiście $x_1 < x_2$, więc jeśli spełniony będzie układ nierówności $x_1 \geqslant -2$ i $x_2 \leqslant 4$, czyli układ nierówności:

$$\begin{cases} m - 1 \geqslant -2 \\ m + 1 \leqslant 4, \end{cases}$$

to pierwiastki te będą należeć do przedziału $\langle -2; 4 \rangle$. Po rozwiązaniu tego układu, otrzymujemy $-1 \leqslant m \leqslant 3$.

Odpowiedź: Pierwiastki rzeczywiste danego równania będą należeć do przedziału $\langle -2; 4 \rangle$ dla $m \in \langle -1; 3 \rangle$.

Przykład 5. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie $a \in R$ liczbę pierwiastków rzeczywistych równania $(a+2)x^2 + 6ax + 4a - 1 = 0$. Sporządź wykres funkcji f.

Rozwiązanie:

Rozróżnimy dwa przypadki:

1. $a = -2$. Dane równanie przybiera wtedy postać $-12x - 9 = 0$ i ma jeden pierwiastek rzeczywisty; jest nim liczba $-\frac{3}{4}$.
2. $a \neq -2$. Należy wówczas zbadać znak wyróżnika Δ.

Mamy: $\Delta = (6a)^2 - 4(a+2)(4a-1) = 4(5a^2 - 7a + 2)$. Wobec tego:

$$\Delta > 0 \iff 5a^2 - 7a + 2 > 0 \iff a < \frac{2}{5} \text{ lub } a > 1,$$

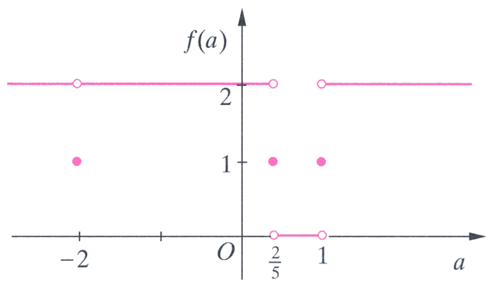
$$\Delta = 0 \iff a = \frac{2}{5} \text{ lub } a = 1,$$

$$\Delta < 0 \iff \frac{2}{5} < a < 1.$$

Zatem funkcja f jest określona następująco:

$$f(a) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } \frac{2}{5} < a < 1 \\ 1, \text{ gdy } a \in \left\{-2, \frac{2}{5}, 1\right\} \\ 2, \text{ gdy } \left(a < \frac{2}{5} \text{ i } a \neq -2\right) \text{ lub } a > 1. \end{cases}$$

Wykres funkcji f przedstawia rycina 1.28.



Ryc. 1.28.

Przykład 6. Dla jakich wartości parametru m równanie:

$(*)\ x^2 - 4x + (1-m) = 0$

ma pierwiastki rzeczywiste w przedziale $\langle 0; 5\rangle$?

Rozwiązanie:

Tym razem postąpimy inaczej niż w przykładzie 4. Przepiszmy równanie $(*)$ równoważnie:

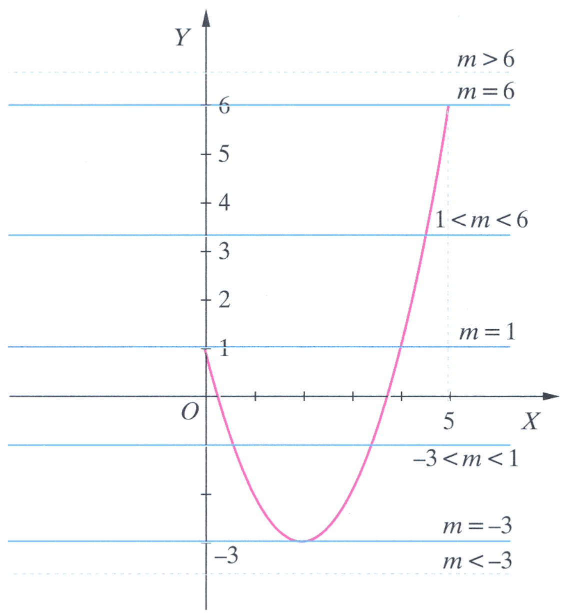
$(**)\ x^2 - 4x + 1 = m$

i rozważmy funkcje zmiennej rzeczywistej x:

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ i $g(x) = m$.

Pierwiastkom rzeczywistym równania $(**)$ w przedziale $\langle 0; 5\rangle$, a zatem także równoważnego mu równania $(*)$, odpowiadają, oczywiście, odcięte punktów przecięcia wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$, gdy $x \in \langle 0; 5\rangle$ (ryc. 1.29).

Odpowiedź: Równanie $(*)$ ma pierwiastki rzeczywiste w przedziale $\langle 0; 5\rangle$ dla $m \in \langle -3; 6\rangle$.



Ryc. 1.29.

Przykład 7[*]. Wyznacz liczbę pierwiastków rzeczywistych równania $x \cdot |x| = x + c$ w zależności od parametru c.

Rozwiązanie:

Pierwszy sposób:

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $x \geqslant 0$. Dane równanie przybiera wtedy postać: $(*)$ $x^2 - x - c = 0$. Jego wyróżnik $\Delta = 1 + 4c$ i wówczas:
   - gdy $\Delta < 0$, czyli gdy $c < -\frac{1}{4}$, to równanie $(*)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych;
   - gdy $\Delta = 0$, czyli gdy $c = -\frac{1}{4}$, to równanie $(*)$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty $x_0 = \frac{1}{2}$;
   - gdy $\Delta > 0$, czyli gdy $c > -\frac{1}{4}$, to równanie $(*)$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste

     $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$, z których pierwszy jest nieujemny dla $c \leqslant 0$ (sprawdź to!), drugi zaś jest dodatni dla każdego $c > -\frac{1}{4}$.

   Wobec tego równanie $(*)$:
   - ma dwa pierwiastki rzeczywiste, gdy $c \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right\rangle$;
   - ma jeden pierwiastek rzeczywisty, gdy $c = -\frac{1}{4}$ lub $c > 0$;
   - nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy $c < -\frac{1}{4}$.

2. $x < 0$. Dane równanie ma wtedy postać $(**)$ $x^2 + x + c = 0$. Jego wyróżnik $\Delta = 1 - 4c$ i wówczas:
   - gdy $\Delta < 0$, czyli gdy $c > \frac{1}{4}$, to równanie $(**)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych;
   - gdy $\Delta = 0$, czyli gdy $c = \frac{1}{4}$, to równanie $(**)$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty $x_0 = -\frac{1}{2}$;
   - gdy $\Delta > 0$, czyli gdy $c < \frac{1}{4}$, to równanie $(**)$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste

     $$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \text{ i } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

   z których pierwszy jest ujemny dla każdego $c \leqslant \frac{1}{4}$, drugi zaś dla $c > 0$ (sprawdź to!). Wobec tego równanie $(**)$:
   - ma dwa pierwiastki rzeczywiste, gdy $c \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$;
   - ma jeden pierwiastek rzeczywisty, gdy $c = \frac{1}{4}$ lub $c \leqslant 0$;
   - nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy $c > \frac{1}{4}$.

   Ostatecznie więc równanie $x \cdot |x| = x + c$ ma:
   - trzy pierwiastki rzeczywiste, gdy $c \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$;
   - dwa pierwiastki rzeczywiste, gdy $c = -\frac{1}{4}$ lub $c = \frac{1}{4}$;
   - jeden pierwiastek rzeczywisty, gdy $c \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

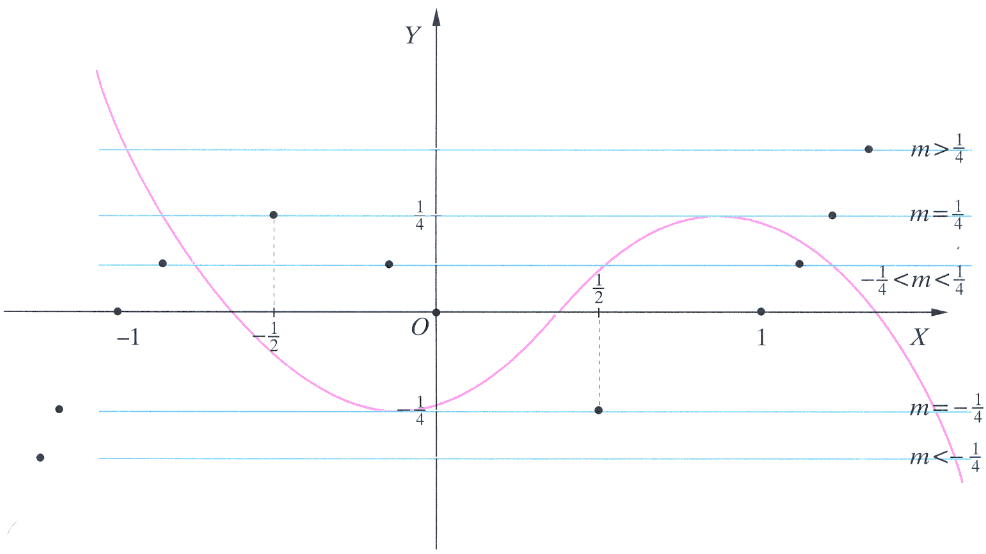
Drugi sposób:

Przepiszmy równanie $x \cdot |x| = x + c$ w postaci $x \cdot |x| - x = c$ i rozważmy funkcje: $f(x) = x \cdot |x| - x$ i $g(x) = c$ dla $x \in \boldsymbol{R}$.

Wówczas liczba pierwiastków rzeczywistych danego równania odpowiadać będzie liczbie punktów przecięcia się wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$. Przyjrzyjmy się zatem wykresom tych funkcji na rycinie 1.30. Wcześniej warto zauważyć, że:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x^2 - x, & \text{gdy } x < 0, \text{ czyli} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$



Ryc. 1.30.

Teraz widzimy, że wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ przecinają się:

– w trzech punktach, gdy $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$;

– w dwóch punktach, gdy $m = -\frac{1}{4}$ lub $m = \frac{1}{4}$;

– w jednym punkcie, gdy $m < -\frac{1}{4}$ lub $m > \frac{1}{4}$.

Przykład 8*. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ spełniają warunek $|x_1 - x_2| = 1$?

Rozwiązanie:

Mamy: $|x_1 - x_2| = 1 \iff (x_1 - x_2)^2 = 1 \iff (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$, co na mocy wzorów Viète'a równoważne jest równości: $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 - 2(m+1) = 1$.

Ale $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 - 2(m+1) = 1 \iff (m-1)^2 - 8(m+1) = 4 \iff m^2 - 10m - 11 = 0 \iff$
$\iff m = -1$ lub $m = 10$.

Należy jeszcze sprawdzić, czy dla znalezionych wartości m wyróżnik Δ równania $2x^2-(m-1)x+(m+1)=0$ jest nieujemny (tylko wtedy x_1 i x_2 są liczbami rzeczywistymi).

Obliczamy: $\Delta=(m-1)^2-4\cdot 2\cdot(m+1)=m^2-10m-7$.

Dla $m=-1$ mamy $\Delta=(-1)^2-10\cdot(-1)-7=4>0$, zaś dla $m=10$ mamy $\Delta=10^2-10\cdot 10-7=-7<0$.

Odpowiedź: Pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 równania $2x^2-(m-1)x+(m+1)=0$ spełniają warunek $|x_1-x_2|=1$, gdy $m=-1$.

Przykład 9. Dla jakiej wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków rzeczywistych równania $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ jest najmniejsza?
Rozwiązanie:

Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami rzeczywistymi tego równania. Należy wyznaczyć takie m, dla którego wyróżnik Δ danego równania jest nieujemny i suma $x_1^2+x_2^2$ jest najmniejsza.

Obliczamy:

1. $\Delta=(m-2)^2+4(m+3)=m^2+16$, zatem $\Delta>0$ dla każdego m.

2. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-2)^2+2(m+3)=m^2-2m+10=(m-1)^2+9$

i widzimy, że $x_1^2+x_2^2\geqslant 9$ dla każdego m, przy czym $x_1^2+x_2^2=9$ dla $m=1$.
Odpowiedź: Suma ta jest najmniejsza dla $m=1$.

Przykład 10*. Dla jakich wartości całkowitych a pierwiastki równania $(*)$ $(a-1)x^2-(a^2+1)x+a^2+a=0$ są liczbami całkowitymi?
Rozwiązanie:

Rozróżnimy dwa przypadki:

1. $a=1$. Równanie $(*)$ przybiera wtedy postać $-2x+2=0$ i ma oczywiście pierwiastek całkowity; jest nim liczba 1.
2. $a\neq 1$. Równanie $(*)$ jest wówczas kwadratowe. Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami tego równania. Spełniają więc równości $x_1+x_2=\frac{a^2+1}{a-1}$ i $x_1\cdot x_2=\frac{a^2+a}{a-1}$ (wzory Viète'a).

Ponieważ x_1 i x_2 mają być z założenia liczbami całkowitymi, więc również $\frac{a^2+1}{a-1}$ i $\frac{a^2+a}{a-1}$ muszą być liczbami całkowitymi.

Stąd $\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{(a^2-1)+2}{a-1}=(a+1)+\frac{2}{a-1}$ oraz

$$\frac{a^2+a}{a-1}=\frac{(a^2-1)+(a-1)+2}{a-1}=(a+1)+1+\frac{2}{a-1}.$$

Skoro mamy znaleźć te wartości całkowite a, dla których liczby $\frac{a^2+1}{a-1}$ i $\frac{a^2+a}{a-1}$ są całkowite, to muszą być nimi te wartości całkowite a, dla których liczba $\frac{2}{a-1}$ jest całkowita. Wobec tego liczba $a-1$ musi być dzielnikiem 2. Stąd $a-1\in\{-2,-1,1,2\}$, czyli $a\in\{-1,0,2,3\}$.

Dla każdej znalezionej wartości całkowitej a, to znaczy dla $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$, otrzymujemy odpowiednio równania:

$-2x^2 - 2x = 0, -x^2 - x = 0, x^2 - 5x + 6 = 0, 2x^2 - 10x + 12 = 0$

i każde z nich ma pierwiastki całkowite.
Odpowiedź: Pierwiastki danego równania są liczbami całkowitymi dla $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Przykład 11*. Dane są równania: $x^2 + mx + n = 0$ i $x^2 + px + q = 0$, których współczynniki m, n, p i q są liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że jeżeli $mp = 2(n+q)$, to co najmniej jedno z tych równań ma pierwiastki rzeczywiste.
Rozwiązanie:

Rozumujemy przez sprzeczność. Załóżmy, że żadne z podanych równań nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy ich wyróżniki, odpowiednio $\Delta_1 = m^2 - 4n$ i $\Delta_2 = p^2 - 4q$, są liczbami ujemnymi. Wobec tego suma $\Delta_1 + \Delta_2$ też jest liczbą ujemną. Tymczasem na mocy założenia:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 - 4n + p^2 - 4q = m^2 + p^2 - 4(n+q) = m^2 + p^2 - 2mp = (m-p)^2,$$

co oczywiście jest liczbą nieujemną. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. ▢

Pytania i zadania

1. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)x^2 - 2x + (m-1) = 0$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty?
2. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste?
3. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 równania $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ spełniają nierówność $x_1^2 + x_2^2 < 3x_1 x_2$?
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których jeden z pierwiastków rzeczywistych równania $4x^2 - 15x + 4a = 0$ jest kwadratem drugiego.
5. Dla jakich wartości parametru m równania $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$, $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$ mają wspólny pierwiastek?
6. Dla jakich wartości parametru k jeden z pierwiastków rzeczywistych równania $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k-1)x + 2 = 0$ jest dwukrotnością drugiego?
7. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności pierwiastków rzeczywistych równania $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$ jest równa 2?
8. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków rzeczywistych równania $x^2 + (m-3)x + (m-5) = 0$ jest najmniejsza?

9*. Dla jakiej wartości parametru m odwrotność sumy kwadratów pierwiastków rzeczywistych równania $x^2 - mx + 2m - 5 = 0$ jest największa?

10*. Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - 2mx + (2m-k) = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste dla każdej liczby rzeczywistej m?

11. Udowodnij, że jeżeli równanie $x^2 + px + q = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste, to równanie $x^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)px + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 q = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma także pierwiastki rzeczywiste.

12*. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3 i b_1, b_2, b_3 spełniają warunek $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=4(b_1+b_2+b_3)$, to co najmniej jedno z równań: $x^2+a_1x+b_1=0$, $x^2+a_2x+b_2=0$, $x^2+a_3x+b_3=0$ ma pierwiastki rzeczywiste.

13*. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c różnych od zera co najmniej jedno z równań: $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$ i $cx^2+2ax+b=0$ ma pierwiastki rzeczywiste.

14. Wyznacz wszystkie wartości całkowite a, dla których równanie $x^2+ax+a=0$ ma pierwiastek całkowity.

15*. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki równania $5x^2-5(m-1)x+6m=0$ są odpowiednio sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego?

16**. Udowodnij, że jeżeli równanie $ax^2+bx+c=0$ ma pierwiastki rzeczywiste, to równanie $a^3x^2+b^3x+c^3=0$ także ma pierwiastki rzeczywiste.

17*. Udowodnij, że jeżeli a, b i c są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to równanie $ax^2+bx+c=0$ nie ma pierwiastków wymiernych.

8.2. Nierówności kwadratowe z parametrem

Przykład 1. Dla jakich wartości parametru m nierówność:

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+(5m-6)>0$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x?

Rozwiązanie:

Rozróżnimy dwa przypadki:

1. $m=2$. Dana nierówność przybiera wtedy postać $2x+4>0$ i oczywiście nie zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x.
2. $m\neq 2$. Dana nierówność jest wówczas nierównością kwadratową i zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy spełnione są warunki: $m-2>0$ i $\Delta<0$. Obliczmy wyróżnik Δ:

$$\Delta=\left(2(2m-3)\right)^2-4(m-2)(5m-6)=$$

$$=4\left(4m^2-12m+9\right)-4\left(5m^2-16m+12\right)=$$

$$=4\left(-m^2+4m-3\right)=-4\left(m^2-4m+3\right)=-4(m-1)(m-3).$$

Teraz widzimy, że:

$$\begin{cases} m-2>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \iff \begin{cases} m>2 \\ (m-1)(m-3)>0 \end{cases} \iff m-3>0 \iff m>3.$$

Odpowiedź: Dana nierówność zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $m>3$.

Przykład 2. Dla jakich wartości parametru a nierówność $(a-1)x^2+(a-1)x+a\leqslant 0$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x?

Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozróżnimy dwa przypadki:

1. $a=1$. Dana nierówność jest wówczas równoważna nierówności $1\leqslant 0$; jest więc sprzeczna.

2. $a \neq 1$. Nierówność zachodzi wtedy dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $a-1<0$ i $\Delta \leqslant 0$.
   Obliczmy Δ:

   $$\Delta=(a-1)^2-4(a-1)a=(a-1)(a-1-4a)=-3\left(a+\frac{1}{3}\right)(a-1).$$

   Należy więc rozwiązać układ nierówności $\begin{cases} a-1<0 \\ -3\left(a+\frac{1}{3}\right)(a-1) \leqslant 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} a-1<0 \\ -3\left(a+\frac{1}{3}\right)(a-1) \leqslant 0 \end{cases} \iff a+\frac{1}{3} \leqslant 0 \iff a \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Dana nierówność zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $a \leqslant -\frac{1}{3}$.

Przykład 3*. Dla jakich wartości parametru m zbiór rozwiązań nierówności $x^2-3x+2<0$ zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $(*)$ $mx^2-(3m+1)x+3>0$?
Rozwiązanie:

Po rozwiązaniu w znany sposób nierówności $x^2-3x+2<0$ widzimy, że jest ona spełniona przez każdą liczbę z przedziału $(1;2)$. Należy zatem wyznaczyć te wartości parametru m, dla których zbiór rozwiązań nierówności $(*)$ zawiera przedział $(1;2)$.

Rozróżnimy tutaj dwa przypadki:

1. $m=0$. Nierówność $(*)$ przybiera wtedy postać $-x+3>0$ i jej zbiór rozwiązań, czyli przedział $(-\infty;3)$, zawiera przedział $(1;2)$.
2. $m \neq 0$. Zauważymy wówczas przede wszystkim, że:

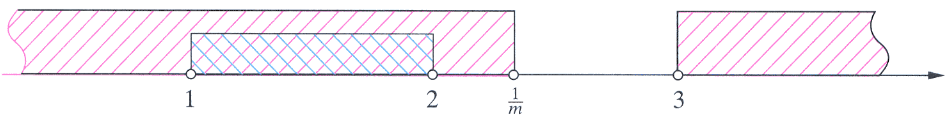
   $$mx^2-(3m+1)x+3=mx(x-3)-(x-3)=m\left(x-\frac{1}{m}\right)(x-3).$$

   Wobec tego $mx^2-(3m+1)x+3>0 \iff m\left(x-\frac{1}{m}\right)(x-3)>0.$

   – Jeśli $m<0$, to zbiorem rozwiązań nierówności $m\left(x-\frac{1}{m}\right)(x-3)>0$ jest przedział $\left(\frac{1}{m};3\right)$ i oczywiście zawiera on przedział $(1;2)$.

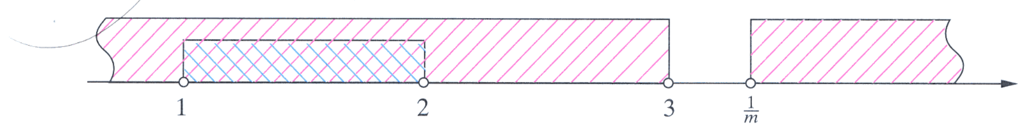
   – Gdy zaś $m>0$, to zbiorem rozwiązań nierówności $m\left(x-\frac{1}{m}\right)(x-3)>0$ jest:

   a) suma przedziałów $\left(-\infty;\frac{1}{m}\right) \cup (3;+\infty)$, gdy $\frac{1}{m} \leqslant 3$, czyli gdy $m \geqslant \frac{1}{3}$, i zawiera ona przedział $(1;2)$, jeśli $\frac{1}{m} \geqslant 2$, to jest gdy $m \leqslant \frac{1}{2}$ (ryc. 1.31);



Ryc. 1.31.

   b) suma przedziałów $(-\infty;3) \cup \left(\frac{1}{m};+\infty\right)$, gdy $\frac{1}{m} \geqslant 3$, czyli gdy $m \leqslant \frac{1}{3}$ i oczywiście zawiera ona przedział $(1;2)$ (ryc. 1.32);



Ryc. 1.32.

Odpowiedź: $m \leqslant \frac{1}{2}$.

Pytania i zadania

1. Dla jakich wartości parametru m nierówność $mx^2 - 4x + m + 3 \geqslant 0$ będzie spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x?
2. Wyznacz te wartości parametru m, dla których nierówność $(1 - m^2)x^2 + 2(1 - m)x - 2 \leqslant 0$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x.
3. Dla jakich wartości parametru k nierówność $x^2 - kx + 2 < 0$ zachodzi dla każdej liczby z przedziału $(1; 2)$?
4. Dla jakich wartości m nierówność $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + 3m - 1 > 0$ będzie prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x?

5*. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - x + m^2 - 2m + \frac{1}{4}$ będzie liczbą z przedziału $\langle 1; 4 \rangle$?

6**. Udowodnij, że jeżeli nierówność $x^2 + px + q > 0$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, zachodzi dla każdej liczby całkowitej x, to zachodzi ona dla każdej liczby rzeczywistej x.

9. Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

Podamy tutaj przykłady zadań, których rozwiązanie prowadzi do równań lub nierówności kwadratowych.

Przykład 1. W turnieju szachowym każdy z zawodników rozegrał z każdym z pozostałych po dwie partie. Ilu zawodników wzięło udział w tym turnieju, jeśli ogółem rozegrano 182 partie?
Rozwiązanie:

Załóżmy, że w turnieju tym wzięło udział x zawodników. Każdy z nich rozegrał $2(x - 1)$ partii. Wobec tego wszyscy rozegrali łącznie $2(x - 1) \cdot x \cdot \frac{1}{2}$ partii, gdyż w grze w szachy biorą udział dwie osoby. Stąd otrzymujemy równanie $x(x - 1) = 182$, czyli równanie $x^2 - x - 182 = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $x_1 = -13$, $x_2 = 14$. Tylko druga z tych liczb odpowiada treści zadania.
Odpowiedź: W turnieju tym wzięło udział 14 zawodników.

Przykład 2. Który wielokąt wypukły ma 14 przekątnych?
Rozwiązanie:

Wiadomo, że jeżeli wielokąt wypukły ma n boków, to ma $\frac{n(n - 3)}{2}$ przekątnych, ponieważ z każdego wierzchołka n-kąta wychodzi $n - 3$ przekątnych, a wierzchołków w n-kącie jest n, przy czym każdą z przekątnych liczymy w ten sposób dwukrotnie. Wobec tego otrzymujemy równanie $\frac{n(n - 3)}{2} = 14$, czyli równanie $n^2 - 3n - 28 = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $n_1 = -4$ i $n_2 = 7$. Pierwszą z nich odrzucamy, gdyż nie spełnia warunku zadania.
Odpowiedź: 14 przekątnych ma siedmiokąt.

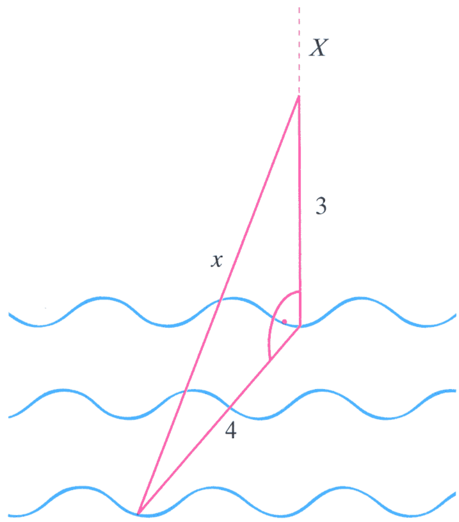
Przykład 3. Bartek wpłacił do pewnego banku 10000 zł. Po dwóch latach, w ciągu których ani nie dopłacał, ani nie podejmował pieniędzy, odebrał kwotę 12100 złotych. Jakie było oprocentowanie wkładu w tym banku?

Rozwiązanie:

Załóżmy, że oprocentowanie wkładu w tym banku wynosi $x\%$. W związku z tym po roku bank dopisał Bartkowi na koncie $10\,000 \cdot \frac{x}{100} = 100x$ zł, a po dwóch latach $(10\,000 + 100x) \cdot \frac{x}{100} = 100x + x^2$ zł. Z treści zadania wynika więc równanie $10\,000 + 100x + 100x + x^2 = 12\,100$, czyli równanie $x^2 + 200x - 2100 = 0$, którego rozwiązaniem są liczby $x_1 = -210$, $x_2 = 10$, przy czym pierwsza z nich nie odpowiada treści zadania.
Odpowiedź: W banku tym oprocentowanie wkładu wynosiło 10%.

Przykład 4. Na samym brzegu strumienia rosła topola. Wiatr złamał ją na wysokości trzech jednostek długości nad ziemią i topola upadła prostopadle do strumienia tak, że jej wierzchołek oparł się o drugi brzeg. Strumień miał szerokość czterech jednostek. Jak wysoka była topola?
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x długość części topoli od miejsca złamania do wierzchołka. Zgodnie z treścią zadania otrzymujemy trójkąt prostokątny (ryc. 1.33) o przyprostokątnych 3 i 4 i przeciwprostokątnej x. Z twierdzenia Pitagorasa wynika równanie $x^2 = 3^2 + 4^2$, skąd $x = 5$, bo $x > 0$. Wobec tego $x + 3 = 8$.
Odpowiedź: Wysokość topoli wynosiła 8 jednostek.



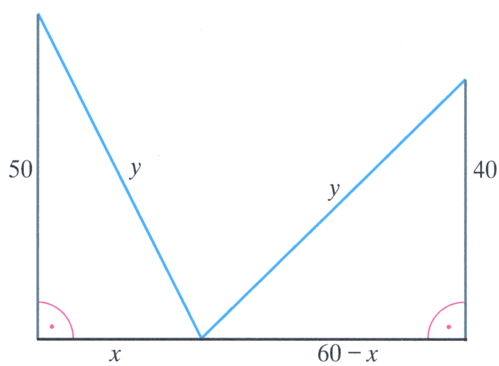
Ryc. 1.33.

Przykład 5. Mamy ogrodzić prostokątną działkę, której jeden bok jest o 10 m dłuższy od drugiego, pole zaś wynosi 1200 m^2. Jakie wymiary ma ta działka?
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x szerokość tej działki. Zatem jej długość wynosi $x + 10$. Wobec tego jej pole jest równe $x(x + 10)$, a z treści zadania wiemy, że 1200 m^2. Stąd równanie $x(x + 10) = 1200$, czyli równanie $x^2 + 10x - 1200 = 0$, którego rozwiązaniem dodatnim jest liczba 30.
Odpowiedź: Działka ma wymiary 30×40.

Przykład 6. Dwie wieże stoją w odległości 60 łokci od siebie. Wysokość jednej wynosi 50 łokci, a drugiej 40 łokci. Pomiędzy wieżami jest studnia, jednakowo oddalona od wierzchołków obu wież. Jak daleko znajduje się studnia od podstawy każdej z wież?
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x odległość studni od podstawy jednej z wież, a przez y – odległość studni od wierzchołków każdej z tych wież (ryc. 1.34). Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równania



Ryc. 1.34.

$y^2 = x^2 + 50^2$ i $y^2 = (60 - x)^2 + 40^2$, a stąd równanie $x^2 + 50^2 = (60 - x)^2 + 40^2$. Rozwiązując je, otrzymujemy kolejno równania:

$(60 - x)^2 - x^2 = 50^2 - 40^2,$

$(60 - x + x)(60 - x - x) = (50 - 40)(50 + 40),$

$60(60 - 2x) = 10 \cdot 90,$

$60 \cdot 2(30 - x) = 10 \cdot 90,$

$30 - x = \frac{15}{2}$, skąd $x = 22{,}5$.

Odpowiedź: Studnia znajduje się w odległości odpowiednio 22,5 i 37,5 łokci od podstaw wież.

Przykład 7. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 10. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez liczbę otrzymaną z danej przez przestawienie cyfr, to otrzymamy 2701. Co to za liczba?
Rozwiązanie:

Oznaczmy jedną z cyfr szukanej liczby, na przykład cyfrę jedności, przez x, druga jest więc równa $10 - x$. Wobec tego w zadaniu jest mowa o liczbach $10x + (10 - x)$ i $10(10 - x) + x$. Z treści zadania otrzymujemy równanie $[10x + (10 - x)] \cdot [10(10 - x) + x] = 2701$, które jest równoważne kolejno równaniom:

$(9x + 10)(100 - 9x) = 2701, \qquad -81x^2 + 810x - 1701 = 0, \qquad x^2 - 10x + 21 = 0.$

Po rozwiązaniu ostatniego z nich otrzymujemy $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.
Odpowiedź: Szukane liczby to 37 i 73.

Przykład 8. Jakie wielokąty wypukłe mają co najmniej dwa razy więcej przekątnych niż boków?
Rozwiązanie:

Wiemy, że wielokąt wypukły o n bokach $(n \geqslant 4)$ ma $\frac{(n-3)n}{2}$ przekątnych. Zadanie sprowadza się do rozwiązania nierówności $2n \leqslant \frac{(n-3)n}{2}$. Po przekształceniu jej otrzymujemy kolejno nierówności:

$4n \leqslant (n - 3) \cdot n \quad /:n$, bo $n \geqslant 4$,
$4 \leqslant n - 3,$
$n \geqslant 7.$

Odpowiedź: Wielokąty wypukłe o co najmniej 7 bokach (siedmiokąty, ośmiokąty itd.).

Przykład 9. Dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $y = x + m + 1$ i $y = 2x - 2m$ przecinają się w kole o środku $O = (0; 0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$?
Rozwiązanie:

Znajdujemy najpierw punkt przecięcia się prostych o danych równaniach przez rozwiązanie układu tych równań; otrzymujemy kolejno układy:

$\begin{cases} y = x + m + 1 \\ y = 2x - 2m, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2m = x + m + 1 \\ y = 2x - 2m, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3m + 1 \\ y = 2(3m + 1) - 2m \end{cases}$

i ostatecznie $\begin{cases} x = 3m + 1 \\ y = 4m + 2. \end{cases}$

Punkt $P = (3m+1; 4m+2)$ należy do koła o środku $O = (0; 0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ wtedy, gdy $OP \leqslant r$, czyli gdy zachodzi nierówność $\sqrt{(3m+1)^2 + (4m+2)^2} \leqslant \sqrt{5}^{\,2}$, a więc także każda z kolejno równoważnych jej nierówności:

$(3m+1)^2 + (4m+2)^2 \leqslant 5,$

$9m^2 + 6m + 1 + 16m^2 + 16m + 4 \leqslant 5,$

$25m^2 + 22m \leqslant 0,$

$25m\left(m + \frac{22}{25}\right) \leqslant 0.$

Rozwiązaniem ostatniej z nich jest każda liczba $m \in \left\langle -\frac{22}{25}; 0 \right\rangle$.

Odpowiedź: Proste o danych równaniach przecinają się w kole o środku o środku O i promieniu r dla $m \in \left\langle -\frac{22}{25}; 0 \right\rangle$.

Pytania i zadania

1. Podczas rozgrywek piłkarskich rozegrano łącznie 30 meczów. Drużyny zostały podzielone na dwie równoliczne grupy. W jednej grupie każda drużyna rozgrywała z każdą inną po dwa mecze, a w drugiej po trzy mecze. Ile drużyn brało udział w tych rozgrywkach?
2. Odgłos upadającego na dno studni kamienia usłyszano w 4 s od chwili swobodnego puszczenia go. Oblicz głębokość tej studni, przyjmując prędkość głosu = 330 m/s i przyspieszenie ziemskie = 10 m/s^2.
3. W pewnym wielokącie wypukłym przekątnych jest o 12 więcej niż boków. Jaki to wielokąt?
4. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 371. Jakie to liczby?
5. Kwiat lotosu wyrósł nad powierzchnię wody na 4 stopy. Pod naporem wiatru zanurzył się w wodzie w odległości 16 stóp od miejsca, w którym był wcześniej widoczny nad wodą. Jaka była głębokość wody?
6. Kwadrat piątej części stada małp zmniejszonej o 3 schował się w jaskini. Na zewnątrz została jedna małpa, która weszła na drzewo. Ile było małp w tym stadzie?
7. W sali kinowej było 320 miejsc. Po dodaniu w każdym rzędzie czterech krzeseł i dostawieniu jeszcze jednego rzędu krzeseł sala ma 420 miejsc. Ile rzędów krzeseł było w tej sali na początku?
8. Środki boków prostokąta o obwodzie równym 28 cm są wierzchołkami rombu o boku 5 cm. Wyznacz długości boków tego prostokąta.
9. Suma liczb wierzchołków dwóch wielokątów wypukłych wynosi 21. Jeden z tych wielokątów ma dwa razy więcej przekątnych niż drugi. Ile wierzchołków ma każdy z tych wielokątów?
10. Przednie koło wozu wykonuje na drodze o długości 14 km o 3000 obrotów więcej niż tylne. Jeżeli obwody tych kół powiększymy o pół metra, to na tej samej drodze przednie koło wykona o 2100 obrotów więcej niż tylne. Wyznacz obwód każdego z tych kół.

11*. Niech M będzie środkiem boku AB prostokąta $ABCD$. Dwusieczna kąta BCD dzieli trójkąt AMD na dwa wielokąty o równych polach. Wyznacz długość boku AD, jeśli bok CD ma długość 4.

12*. Dla jakich wartości parametru a prosta o równaniu $x - y + a = 0$ będzie rozłączna z kołem o środku $S = (-1; 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$?

II. Wielomiany

1. Wielomian jednej zmiennej, stopień wielomianu, równość dwóch wielomianów

Rozpatrywane przez nas dotąd funkcje liniowe i funkcje kwadratowe należą do szerokiej klasy funkcji zwanych funkcjami wielomianowymi lub wielomianami.

Funkcję f określoną dla dowolnej wartości rzeczywistej x wzorem:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy **wielomianem** jednej zmiennej rzeczywistej x.

Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami wielomianu.**
Liczbę k nazywamy wskaźnikiem współczynnika a_k i czytamy:
symbol a_0 jako „a ze wskaźnikiem 0" lub „a zero",
symbol a_1 jako „a ze wskaźnikiem 1" lub „a jeden" itd.,
symbol a_n jako „a ze wskaźnikiem n" lub „a en".

Jeżeli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy stopniem wielomianu f i piszemy: st $f = n$. Tak więc:

- wielomian $x + 2$ jest pierwszego stopnia,
- wielomian $-3x^2 + 2x + 1$ jest drugiego stopnia,
- wielomian $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ jest czwartego stopnia.

Współczynnik $a_n \neq 0$ wielomianu f określa się też mianem **współczynnika kierującego**, zaś współczynnik a_0 – **wyrazu wolnego**. Jeżeli $a_n = 1$, to wielomian f nazywamy **unormowanym**. Na przykład wielomianami unormowanymi są wielomiany: $x - 2$, $x^2 + 5x - 6$, $x^5 + 2x^3 + 1$.

Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, w którym $n = 0$ i $a_0 = 0$, nazywamy wielomianem zerowym, wtedy bowiem dla każdego x zachodzi $f(x) = 0$. Przyjmujemy, że wielomian zerowy nie ma stopnia. Jeżeli $n = 0$ i $a_0 \neq 0$, to wielomian f jest wielomianem stałym a_0 stopnia zerowego.

Będziemy się zajmować głównie wielomianami zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych, choć w niektórych zadaniach wystąpią wielomiany mające współczynniki wymierne lub całkowite.

Zdanie: „Wielomian $f(x)$ jest wielomianem zerowym." zapiszemy: $f(x) \equiv 0$. Wielomiany i zmienną będziemy oczywiście oznaczać różnymi literami. Ponadto wielomiany zapisywać będziemy zawsze albo według malejących wykładników potęg zmiennej, na przykład $W(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$, albo według rosnących wykładników potęg zmiennej, na przykład $P(t) = 2 - 3x + x^2 - 4x^3$.

Wartością wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ w punkcie x_0 nazywamy liczbę $f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$. Jeżeli $f(x_0) = 0$, to x_0 nazywamy **miejscem zerowym** lub **pierwiastkiem** wielomianu f.

Wiemy, że funkcja f i funkcja g jednej zmiennej są równe, gdy są określone w tej samej dziedzinie i dla każdej wartości zmiennej przybierają te same wartości. Zatem wielomiany:

$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

i $P(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$,

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $W(t) = P(t)$ dla każdej liczby rzeczywistej t. Piszemy wówczas: $W(x) \equiv P(x)$. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej. Tak więc, jeśli:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ gdzie } a_n \neq 0,$$

$$\text{i } P(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \text{ gdzie } b_k \neq 0,$$

$$\text{to } \bigwedge_{x \in R} W(x) = P(x) \iff n = k \text{ i } a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0.$$

Gdy $n = k$ i $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$, to oczywiście $W(x) = P(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Dowód, że gdy $W(x) = P(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to $n = k$ i $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$ – pomijamy. Na przykład:

$x^3 + mx^2 - nx - p \equiv x^3 - 2x^2 + x - 1$

wtedy i tylko wtedy, gdy $m = -2$, $n = -1$, $p = 1$.

Jednomianem stopnia *n* jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję:

$(*)$ $y = ax^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$ i $x \in \boldsymbol{R}$.

Dla $n = 0$ jednomian ten ma postać ax^0, więc przyjmuje wartość a dla każdego $x \neq 0$, nie jest zaś określony, gdy $x = 0$. Nadając mu w punkcie $x = 0$ wartość a, rozszerzamy dziedzinę funkcji $y = ax^0$ na cały zbiór $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych. W ten sposób jednomian ax^0 staje się określony dla każdej liczby rzeczywistej x i ma stale wartość a. Jednomiany tego samego stopnia tej samej zmiennej nazywamy **podobnymi**. Na przykład jednomianami podobnymi są:

$2x,\ -x,\ \frac{3}{2}x;\quad -0{,}5x^2,\ 2x^2,\ \frac{5}{3}x^2;\quad at^k,\ bt^k,\ ct^k;$

natomiast na przykład jednomiany: $\frac{1}{2}x, -3x^2, 2x^5$ nie są podobne. Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem. Na przykład:

$-2x^2 + 5x^2 - x^2 = 5x^2 - 3x^2 = 2x^2;$

$\frac{1}{2}t^3 - t^3 + \frac{1}{4}t^3 = -\frac{1}{4}t^3.$

Jednomian zerowy, który może przyjąć różną postać, na przykład $0 \cdot x^2, 0 \cdot y^3, 0 \cdot t^4$ itp., uznajemy za podobny do każdego jednomianu.

Zachodzi więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Suma jednomianów podobnych jest jednomianem do nich podobnym.

Wniosek. Każdy wielomian jest albo jednomianem, albo sumą jednomianów.

Jednomiany $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_1 x$ i a_0 wielomianu:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ nazywamy jego **wyrazami**.

Pytania i zadania

1. Co to jest wielomian jednej zmiennej?
2. Jak określamy stopień wielomianu?
3. Co to jest wielomian zerowy?
4. Podaj określenie: jednomianu stopnia n, jednomianów podobnych.
5. Kiedy dwa wielomiany są równe?
6. Określ stopnie wielomianów:

   a) $-3x^6 + 2x^5 - x^3 + 1$; b) $0{,}5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$;

   c) $5 - 2x^2 - x^3 + 4x^5 - x$; d) $2x - x^2 + 4x^3 - 8x^8 + x^6 - x^7$.

7. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$. Oblicz:

   a) $W(0)$; b) $W(1)$; c) $W(-1)$; d) $W(\sqrt{2})$; e) $W(-\sqrt{2})$.

8*. Dany jest wielomian: $P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \ldots - 12x^2 + 12x - 1$. Oblicz $P(11)$.

9. Dany jest wielomian $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + (1 + \sqrt{2})x - 1$. Oblicz:

   a) $f(\sqrt{2})$; b) $f(1 + \sqrt{2})$; c) $f(3 - \sqrt{2})$.

10. Wyznacz współczynniki b i c wielomianu $f(x) = 3x^2 + bx + c$, wiedząc, że $f(1) = 3$ i $f(-1) = 0$.
11. Dany jest wielomian $P(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$. Wyznacz a i b, jeśli $f(4) = 6$ i $f(1) = 0$.
12. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tak, aby $P(-1) = -2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 4$.
13. Wyznacz tak współczynniki a, b, c, aby następujące wielomiany były równe:

    a) $2x^3 - x^2 + x + 4$ i $ax^3 + (2a + b)x^2 + (2b + c)x + 2a$;

    b) $12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$ i $3ax^3 + (-a + 3b)x^2 + (-b + 3c)x - c$;

    c) $2x^3 + x^2 + 5x + 1$ i $(a + c)x^3 + (-a + b)x^2 + (a - b + 3c)x + b$.

14*. Wykaż, że jeżeli wielomian $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla $x = 0$ i $x = 1$ wartości nieparzyste, to nie ma pierwiastków całkowitych.

15**. Udowodnij, że wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ przyjmuje dla każdej całkowitej wartości x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ i d są całkowite.

2. Działania na wielomianach

Określimy tutaj dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów.

Sumą wielomianów f i g nazywamy taki wielomian h, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $h(x) = f(x) + g(x)$.

Zauważmy, że współczynniki wielomianu h są sumami odpowiednich współczynników wielomianów f i g. Dokładniej, jeśli:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{zaś} \quad g(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ i $b_k \neq 0$, to dla każdego x:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k + b_k) x^k + \ldots + (a_0 + b_0), \text{gdy } n > k; \\ (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0), \text{gdy } n = k; \\ b_k x^k + \ldots + b_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0), \text{gdy } n < k. \end{cases}$$

Wniosek. Stopień sumy wielomianów nie przekracza większego spośród stopni tych wielomianów lub suma wielomianów jest wielomianem zerowym. Jeśli zatem $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami, to $\text{st}\left(f(x) + g(x)\right) \leqslant \max\left\{\text{st}\, f(x), \text{st}\, g(x)\right\}$ lub $f(x) + g(x) \equiv 0$.

Przykład 1. Wyznacz sumę wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, gdy $W(x) = -5x^4 + 3x^2 + 2$, $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 4$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$W(x) + P(x) = \left(-5x^4 + 3x^2 + 2\right) + \left(x^3 - x^2 + 3x - 4\right) =$$

$$= -5x^4 + x^3 + \left(3x^2 - x^2\right) + 3x + (2 - 4) = -5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 2.$$

Podobnie określamy różnicę wielomianów.

Różnicą wielomianów f i g nazywamy taki wielomian h, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $h(x) = f(x) - g(x)$.

Stwierdzamy więc, że jeżeli:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \text{ i } \ g(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ i $b_k \neq 0$, to $f - g$ ma współczynniki będące różnicami odpowiednich współczynników wielomianów f i g. Stąd:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} a_n x^n + \ldots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k - b_k) x^k + \ldots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0), \text{gdy } n > k; \\ (a_n - b_n) x^n + \ldots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0), \text{gdy } n = k; \\ -b_k x^k - \ldots - b_{n+1} x^{n+1} + (a_n - b_n) x^n + \ldots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0), \text{gdy } n < k. \end{cases}$$

Zatem stopień różnicy dwóch wielomianów określa się podobnie jak stopień ich sumy.

Przykład 2. Wyznacz różnicę wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, gdy

$W(x) = -4x^4 + 2x^2 - x + 2$, $P(x) = -x^5 - 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$W(x) - P(x) = \left(-4x^4 + 2x^2 - x + 2\right) - \left(-x^5 - 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1\right) =$$
$$= x^5 + (-4+5)x^4 + 3x^3 + (2-1)x^2 + (-1+3)x + (2+1) =$$
$$= x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3.$$

Iloczyn wielomianów określamy podobnie jak ich sumę i różnicę.

Iloczynem wielomianów f i g nazywamy taki wielomian h, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. !

Wyznaczmy teraz współczynniki wielomianu $f(x) \cdot g(x)$ w zależności od współczynników wielomianów f i g.

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

zaś $g(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\left(b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) =$$
$$= a_n b_k x^{n+k} + \left(a_n b_{k-1} + a_{n-1} b_k\right) x^{n+k-1} + \left(a_n b_{k-2} + a_{n-1} b_{k-1} + a_{n-2} b_k\right) x^{n+k-2} +$$
$$+ \ldots + \left(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2\right) x^2 + \left(a_1 b_0 + a_0 b_1\right) x + a_0 b_0.$$

Istotnie, $(n+k)$-tą (czyt. en plus katą) potęgę x możemy otrzymać jedynie przez pomnożenie jednomianu $a_n x^n$ przez $b_k x^k$, a każdą niższą potęgę x, na przykład x^l, otrzymamy przez pomnożenie takich wyrazów $a_r x^r$ i $b_s x^s$, że $r + s = l$. Współczynnik przy x^l w iloczynie wielomianów $f(x)$ i $g(x)$ jest zatem sumą wszystkich takich iloczynów $a_r b_s$, że $r + s = l$, czyli:

$$f(x) \cdot g(x) = \ldots + \left(a_l b_0 + a_{l-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{l-1} + a_0 b_l\right) x^l + \ldots$$

Wniosek. Stopień iloczynu niezerowych wielomianów równy jest sumie stopni czynników. Jeśli więc $W(x) \not\equiv 0$ i $P(x) \not\equiv 0$, to $\operatorname{st}\left(W(x) \cdot P(x)\right) = \operatorname{st} W(x) + \operatorname{st} P(x)$.

Przykład 3. Wyznacz iloczyn wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, gdy $W(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$, $P(x) = x^2 + x$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$W(x) \cdot P(x) = \left(4x^3 - 2x^2 + x - 1\right)\left(x^2 + x\right) =$$
$$= 4x^3 \cdot x^2 + 4x^3 \cdot x + \left(-2x^2\right) \cdot x^2 + \left(-2x^2\right) \cdot x + x \cdot x^2 + x \cdot x + (-1) \cdot x^2 + (-1) \cdot x =$$
$$= 4x^5 + (4-2)x^4 + (-2+1)x^3 + (1-1)x^2 - x = 4x^5 + 2x^4 - x^3 - x.$$

Uporządkowanie wielomianu danego w postaci sumy, różnicy lub iloczynu wielomianów oznacza:
- wykonanie wskazanych działań,
- zredukowanie wyrazów podobnych,
- zapisanie go w postaci sumy jednomianów według rosnących lub malejących wykładników potęg zmiennej.

Aby uniknąć błędów przy wykonywaniu działań na wielomianach, warto przestrzegać następujących zasad:
- wielomiany porządkujemy według rosnących lub malejących wykładników potęg zmiennej;
- rachunki zapisujemy tak, aby łatwo było redukować wyrazy podobne;
- ostateczny wynik zapisujemy w uporządkowany sposób.

Przykład 4. Oblicz $W(x)+P(x)$, jeśli:

$W(x)=3x^5-4x^4+3x^2-x+1$,

$P(x)=x^4-3x^3+2x^2+4x$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$\begin{array}{l} W(x)=3x^5-4x^4+3x^2-x+1 \\ + \\ P(x)=x^4-3x^3+2x^2+4x \\ \hline W(x)+P(x)=3x^5-3x^4-3x^3+5x^2+3x+1. \end{array}$$

Przykład 5. Wyznacz $W(t)-P(t)$, jeśli:

$W(t)=1+t-t^2+t^3-t^4+t^5$,

$P(t)=1-t-t^2-t^3-t^4$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$\begin{array}{l} W(t)=1+t-t^2+t^3-t^4+t^5 \\ - \\ P(t)=1-t-t^2-t^3-t^4 \\ \hline W(t)-P(t)=2t+2t^3+t^5=2t+2t^3+t^5. \end{array}$$

Przykład 6. Oblicz $F(x)\cdot G(x)$, jeśli:

$F(x)=a_3\cdot x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ i $G(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$.

Rozwiązanie:

Posłużmy się tabelką:

	a_3	a_2	a_1	a_0
b_3	a_3b_3	a_2b_3	a_1b_3	a_0b_3
b_2	a_3b_2	a_2b_2	a_1b_2	a_0b_2
b_1	a_3b_1	a_2b_1	a_1b_1	a_0b_1
b_0	a_3b_0	a_2b_0	a_1b_0	a_0b_0

Widzimy teraz, że:
- sumy iloczynów wpisanych kolejno na przekątnych są współczynnikami przy odpowiednich potęgach zmiennej;
- suma wskaźników w każdym iloczynie na danej przekątnej jest stała i równa wykładnikowi odpowiedniej potęgi zmiennej.

Dlatego:

$$F(x)\cdot G(x)=a_3b_3x^6+\left(a_3b_2+a_2b_3\right)x^5+\left(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3\right)x^4+$$
$$+\left(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3\right)x^3+\left(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2\right)x^2+\left(a_1b_0+a_0b_1\right)x+a_0b_0.$$

Pytania i zadania

1. Podaj określenie sumy, różnicy i iloczynu dwóch wielomianów.
2. Jak określa się stopień sumy, różnicy i iloczynu dwóch wielomianów?
3. Podaj przykład takich wielomianów f i g, aby:

   a) $\operatorname{st}(f+g)=\max\{\operatorname{st} f, \operatorname{st} g\}$;

   b) $\operatorname{st}(f+g)=\max\{\operatorname{st} f, \operatorname{st} g\}-2$;

   c) $\operatorname{st}(f\cdot g)=\max\{\operatorname{st} f, \operatorname{st} g\}$.
4. Wykonaj działania:

   a) $\left(4x^2-2x+1\right)+\left(x^3-2x^2-x+1\right)$;

   b) $\left(2x^3-x+1\right)-\left(x^3-x^2+2x-2\right)$;

   c) $\left(6x^3-2x^2+x-1\right)-\left(2x^3+2x^2-3x+2\right)-\left(4x^3-4x^2+4x-3\right)$.
5. Wykonaj działania:

   a) $\left(x^2+5x-6\right)(x+1)$; b) $(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)$; c) $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.
6. Wyznacz takie współczynniki $a, b, c,$ aby $W(x)\equiv P(x)$, gdy:

   a) $W(x)=6x^3-23x^2+29x-12$ i $P(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$;

   b) $W(x)=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$
   i $P(x)=5x^2-19x+18$.

7*. Jaki jest stopień wielomianu $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{2^n}+1)$?

8*. Wyznacz współczynniki przy x^{10} i x^9 w wielomianie $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-10)$.

9*. Wyznacz wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ najniższego stopnia, dla których
$(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)P(x) \equiv x^4-(x^3-5x-3)Q(x)$.

10**. Dany jest wielomian $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli $7 \mid f(x)$ dla każdej liczby całkowitej x, to wszystkie współczynniki tego wielomianu są podzielne przez 7.

11*. Wyznacz sumę współczynników wielomianu:

$$W(x)=3(x^3-3x+3)^{2002}-4(x^3+2x^2-4)^{2003}.$$

12*. Dla jakich a i b wielomian $W(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ jest kwadratem innego wielomianu?

3. Twierdzenie o dzieleniu z resztą. Podzielność wielomianów

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia liczb całkowitych. Przypomnijmy sobie zatem najpierw pewne fakty z teorii podzielności liczb całkowitych, omawiane w klasie pierwszej.

Wiemy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Dla każdej pary liczb całkowitych a i b, gdzie $b \neq 0$, istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych k i r taka, że $a = k \cdot b + r$ i $0 \leqslant r < |b|$.

Liczby k i r to odpowiednio **iloraz** i **reszta** z dzielenia a przez b. Jeżeli $r = 0$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez b lub że b jest dzielnikiem (albo podzielnikiem) liczby a, co zapisujemy $b \mid a$. Tak więc:

$$b \mid a \iff \bigvee_{k \in C} a = k \cdot b.$$

Pamiętamy też, że 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby całkowitej.

Podzielić liczbę całkowitą a przez liczbę całkowitą $b \neq 0$ oznacza zatem znaleźć iloraz k i resztę r z dzielenia a przez b. Warto również przypomnieć sobie algorytm dzielenia liczb całkowitych.

Przykład 1. Podziel liczbę 24301 przez 101.
Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l} 24301 : 101 = 240 \\ \underline{-202} \\ 410 \\ \underline{-404} \\ 61. \end{array}$$

Mamy więc:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 24301 & = & 101 & \cdot & 240 & + & 61 & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ a & = & b & \cdot & k & + & r & & \text{i} & & 61 < 101. \\ \scriptstyle\text{dzielna} & & \scriptstyle\text{dzielnik} & & \scriptstyle\text{iloraz} & & \scriptstyle\text{reszta} & & & & \end{array}$$

Przykład 2. Podziel 24341 przez 241.

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l} 24341 : 241 = 101 \\ \underline{-241} \\ 241 \\ \underline{-241} \\ 0. \end{array}$$

Mamy zatem:

$$\begin{array}{ccccccc} 24341 & = & 241 & \cdot & 101 & + & 0. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & = & b & \cdot & k & + & r \\ \scriptstyle\text{dzielna} & & \scriptstyle\text{dzielnik} & & \scriptstyle\text{iloraz} & & \scriptstyle\text{reszta} \end{array}$$

Ponieważ $r = 0$, więc $241 \mid 24341$.

Powróćmy do wielomianów. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $g(x)$, gdzie $g(x) \not\equiv 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $h(x)$ i $r(x)$ taka, że $f(x) = g(x) \cdot h(x) + r(x)$ i $\text{st}\, r(x) < \text{st}\, g(x)$ lub $r(x) \equiv 0$.

Jeżeli $r(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $g(x)$ lub że wielomian $g(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $f(x)$, co zapisujemy: $g(x) \mid f(x)$.

Tak więc:

$$g(x) \mid f(x) \iff \bigvee_{h(x)} f(x) = g(x) \cdot h(x), \text{ gdzie } h(x) \text{ jest wielomianem.}$$

Twierdzenia o dzieleniu z resztą nie będziemy dowodzić, gdyż wykracza to znacznie poza ramy naszego podręcznika. Zapamiętajmy, że podzielenie wielomianu $f(x)$ przez niezerowy wielomian $g(x)$ oznacza znalezienie ilorazu i reszty z dzielenia $f(x)$ przez $g(x)$. Prześledźmy to na konkretnych przykładach.

Przykład 3. Dane są wielomiany:

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ i $g(x) = x^2 - x + 2$.

Wyznacz takie wielomiany $h(x)$ i $r(x)$, by $f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$ i $\text{st}\, r(x) < \text{st}\, g(x) = 2$.

Rozwiązanie:

Oto sposób postępowania:

1. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu $f(x)$ przez pierwszy wyraz wielomianu $g(x)$: $x^3 : x^2 = x$. Mnożymy $g(x)$ przez x i odejmujemy od $f(x)$:

$$f(x) - x \cdot g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - x\left(x^2 - x + 2\right) = 3x^2 + x + 4.$$

2. Dzielimy pierwszy wyraz otrzymanego wielomianu przez pierwszy wyraz wielomianu $g(x)$: $3x^2 : x^2 = 3$. Mnożymy $g(x)$ przez 3 i odejmujemy od otrzymanego przed chwilą wielomianu:

$$\left[f(x) - x \cdot g(x)\right] - 3 \cdot g(x) = \left(3x^2 + x + 4\right) - 3\left(x^2 - x + 2\right) = 4x - 2.$$

Otrzymany wielomian jest stopnia pierwszego, a więc mniejszego niż st $g(x)$, zatem jest szukaną resztą. Istotnie, otrzymaliśmy:

$$\left[f(x) - x \cdot g(x)\right] - 3 \cdot g(x) = 4x - 2, \text{ więc:}$$

$$f(x) - x \cdot g(x) - 3 \cdot g(x) = 4x - 2,$$

$$f(x) = (x + 3) \cdot g(x) + (4x - 2).$$

Znaleźliśmy iloraz $h(x) = x + 3$ i resztę $r(x) = 4x - 2$.

Zazwyczaj dzielenie takie wykonujemy według schematu (podobnego do schematu dzielenia liczb całkowitych):

$$\begin{array}{l}
\underline{\quad x + 3 \qquad\qquad\qquad} \\
\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right) : \left(x^2 - x + 2\right) \\
\underline{-\left(x^3 - x^2 + 2x\right)} \\
\qquad 3x^2 + x + 4 \\
\qquad \underline{-\left(3x^2 - 3x + 6\right)} \\
\qquad\qquad 4x - 2.
\end{array}$$

Przykład 4. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 2x + 3$.

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l}
\underline{\quad 3x + 8 \qquad\qquad\qquad} \\
\left(3x^3 + 2x^2 + x - 1\right) : \left(x^2 - 2x + 3\right) \\
\underline{-\left(3x^3 - 6x^2 + 9x\right)} \\
\qquad 8x^2 - 8x - 1 \\
\qquad \underline{-\left(8x^2 - 16x + 24\right)} \\
\qquad\qquad 8x - 25.
\end{array}$$

Iloraz wynosi $3x + 8$, a reszta $8x - 25$.

Przykład 5. Wyznacz wielomian $f(x)$, który z dzielenia przez wielomian $g(x) = 2x^2 + x - 3$ daje iloraz $h(x) = x^2 + 3$ i resztę $r(x) = x + 1$.
Rozwiązanie:

Zgodnie z twierdzeniem o dzieleniu z resztą zachodzi równość:

$W(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$, czyli równość:

$$W(x) = \left(x^2 + 3\right)\left(2x^2 + x - 3\right) + x + 1,$$

skąd po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy szukany wielomian $W(x)$, a mianowicie: $W(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x - 8$.

Przykład 6. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 2$?
Rozwiązanie:

Wykonajmy najpierw dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$:

$$\begin{array}{l}
\quad x + (a+3) \\
\hline
\left(x^3 + ax^2 + bx - 6\right) : \left(x^2 - 3x + 2\right) \\
-\left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \\
\hline
(a+3)x^2 + (b-2)x - 6 \\
-\left((a+3)x^2 - 3(a+3)x + 2(a+3)\right) \\
\hline
\qquad \left(3(a+3) + b - 2\right)x - 6 - 2(a+3).
\end{array}$$

Zachodzi więc równość:

$$x^3 + ax^2 + bx - 6 = \left(x + (a+3)\right)\left(x^2 - 3x + 2\right) + (3a + b + 7)x + (-2a - 12).$$

Stąd widzimy, że:

$$P(x) \mid W(x) \iff (3a + b + 7)x + (-2a - 12) \equiv 0 \iff$$

$$\iff 3a + b + 7 = 0 \text{ i } -2a - 12 = 0.$$

Po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{cases} 3a + b + 7 = 0 \\ -2a - 12 = 0, \end{cases}$$

otrzymujemy: $a = -6$, $b = -11$.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez wielomian.
2. Co to oznacza, że wielomian $f(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $g(x)$?
3. Wykonaj dzielenie wielomianów:

a) $\left(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3\right) : (x - 1)$; b) $\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) : \left(x^2 - 5x + 6\right)$;

c) $\left(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15\right) : \left(x^2 + x + 1\right)$; d) $\left(x^5 - 1\right) : (x - 1)$;

e) $\left(x^5 + 4x^2 + 3x + 5\right) : \left(x^2 - 3x + 6\right)$; f) $\left(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x + 1\right) : \left(x^3 - 2x^2 + x + 3\right)$.

4. Podaj przykład takich dwóch wielomianów, które nie dzielą się przez $x^2 + 2x + 3$, a których suma dzieli się przez $x^2 + 2x + 3$.
5. Czy z tego, że dwa wielomiany f i g nie są podzielne przez wielomian h, wynika, że iloczyn $f \cdot g$ nie jest podzielny przez h? Odpowiedź uzasadnij.
6. Dla jakich a i b reszta z dzielenia wielomianu:

   $$W(x) = x^4 + (a+b)x^3 + x^2 + (2a-b)x - 15$$

   przez wielomian $P(x) = x^2 + 2x - 3$ wynosi $r(x) = 2x - 3$?
7*. Z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ otrzymano resztę $R(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - 1$.
8. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - x + b$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 5$?
9. Dla jakich wartości a i b wielomian $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + ax + b$ jest podzielny przez wielomian $x^2 - 1$?
10. Dla jakich wartości a i b wielomian $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = (x-1)^2$?
11*. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych podzielimy przez unormowany wielomian $g(x)$ o współczynnikach całkowitych, to iloraz i reszta z tego dzielenia będą wielomianami o współczynnikach całkowitych.
12*. Wykaż, że jeżeli $f(x)$ jest dowolnym wielomianem, zaś a – dowolną liczbą rzeczywistą, to wielomian $f(x) - f(a)$ jest podzielny przez $x - a$.
13*. Niech $r(p, q)$ oznacza resztę z dzielenia wielomianu p przez wielomian q. Udowodnij, że:

   $$r(p_1 + p_2, q) = r(p_1, q) + r(p_2, q) \text{ i } r(p_1 \cdot p_2, q) = r\big(r(p_1, q) \cdot r(p_2, q), q\big).$$

4. Schemat Hornera i twierdzenie Bézouta

Powróćmy do dzielenia wielomianów i zajmijmy się przypadkiem, gdy dzielnik jest wielomianem postaci $x - c$. Ponieważ wielomian $x - c$ jest stopnia pierwszego, więc dzieląc przez niego dowolny wielomian n-tego stopnia:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ gdzie } a_n \neq 0,$$

otrzymamy iloraz:

$$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0, \text{ gdzie } b_{n-1} \neq 0$$

i resztę, która jest wielomianem stopnia zerowego, a więc pewną liczbą r.

Wyrażamy to oczywiście następującą równością:

$f(x) = (x - c) \cdot g(x) + r$, czyli równością:

$$(*)\ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - c)\big(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\big) + r_0.$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej wielomianów stojących po obu stronach równości (∗), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&a_n = b_{n-1}\\
&a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}\\
&a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}\\
&a_{n-3} = b_{n-4} - cb_{n-3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_2 = b_1 - cb_2\\
&a_1 = b_0 - cb_1\\
&a_0 = r - cb_0
\end{aligned}
$$

skąd:

$$
\left.
\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n\\
&b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}\\
&b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_2 = a_3 + cb_3\\
&b_1 = a_2 + cb_2\\
&b_0 = a_1 + cb_1\\
&r = a_0 + cb_0.
\end{aligned}
\right\} (**)
$$

Otrzymane równości nazywamy **schematem Hornera**. Pozwala on wyznaczyć współczynniki ilorazu i resztę z dzielenia wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ przez wielomian $x - c$, obliczenia zaś z tym związane wykonujemy zazwyczaj w tabelce:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...	b_1	b_0	r

w której, zgodnie z wzorami (∗∗), przyjmujemy:

$$b_{n-1} = a_n,\ b_k = a_{k+1} + cb_{k+1} \ \text{dla}\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-2,\ r = a_0 + cb_0.$$

Warto przy tym zauważyć, że:

$$
\begin{aligned}
&r = a_0 + cb_0 = a_0 + c(a_1 + cb_1) = a_0 + a_1 c + c^2(a_2 + cb_2) =\\
&= a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + c^3(a_3 + cb_3) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + c^4 b_3 =\\
&= \ldots = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + \ldots + a_n c^n = f(c).
\end{aligned}
$$

Zachodzi więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie Bézouta

Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu $f(x)$ przez wielomian $x - c$ jest równa wartości $f(c)$ wielomianu f w punkcie c.

Wyrazić to możemy równością: $f(x) = (x - c) \cdot g(x) + f(c)$, gdzie $g(x)$ jest pewnym wielomianem (a dokładnie ilorazem z dzielenia $f(x)$ przez $g(x)$).

Dowód twierdzenia Bézouta można otrzymać też innym sposobem. Ponieważ mamy równość $f(x)=(x-c)\cdot g(x)+r$, więc po podstawieniu w niej $x=c$ otrzymujemy:

$$f(c)=(c-c)\cdot g(c)+r, \text{ skąd } r=f(c).$$

Wiemy, że wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $g(x)$, gdy otrzymaną w tym dzieleniu resztę stanowi wielomian zerowy. Z tego zdania i z twierdzenia Bézouta wynika następujący wniosek:

Wniosek. Liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $x-c$.

Podzielność wielomianu $f(x)$ przez wielomian $x-c$ jest więc warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby liczba c była pierwiastkiem wielomianu $f(x)$.

Przykład 1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x)=3x^4-x^3+2x^2+x-1$ przez wielomian $g(x)=x-1$.

Rozwiązanie:

Posłużmy się schematem Hornera. Budujemy tabelkę, do której w pierwszym wierszu wpisujemy współczynniki wielomianu $f(x)$ (dzielnej). Ponieważ tutaj $c=1$, więc do pierwszego okienka drugiego wiersza wpisujemy 1, a do następnego przepisujemy współczynnik 3. Dalej obliczenia wykonujemy według podanych w schemacie Hornera wzorów:

	3	−1	2	1	−1
1	3	2	4	5	4

Otrzymujemy:

$-1+1\cdot 3=2, \quad 2+1\cdot 2=4, \quad 1+1\cdot 4=5, \quad -1+1\cdot 5=4.$

Zatem poszukiwanym ilorazem jest wielomian $3x^3+2x^2+4x+5$, a resztą – liczba 4.

Przykład 2. Wyznacz a i b, jeśli wiesz, że wielomian $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$ przy dzieleniu przez $x-4$ daje resztę 6, a przy dzieleniu przez $x-1$ daje resztę 0.

Rozwiązanie:

Na mocy twierdzenia Bézouta mamy:

$f(4)=6$ i $f(1)=0$. Z drugiej strony:

$f(4)=4^3-6\cdot 4^2+a\cdot 4+b=4a+b-32$, zaś:

$f(1)=1^3-6\cdot 1^2+a\cdot 1+b=a+b-5.$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4a+b=38 \\ a+b=5, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para liczb: $a=11$, $b=-6$.

Przykład 3. Wielomian $f(x)$ przy dzieleniu przez $x-1$ daje resztę 2, a przy dzieleniu przez $x-2$ daje resztę 1. Znajdź resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x-1)(x-2)$.
Rozwiązanie:

Ponieważ wielomian $(x-1)(x-2)$ jest stopnia drugiego, więc poszukiwaną resztą jest wielomian stopnia najwyżej pierwszego. Zadanie sprowadza się zatem do znalezienia takich liczb a i b, że zachodzi równość:

$(*)\ f(x)=(x-1)(x-2)\cdot g(x)+(ax+b)$, gdzie $g(x)$ jest wielomianem.

Z twierdzenia Bézouta mamy też równości:

$(**)\ f(x)=(x-1)\cdot h(x)+2$,

$(***)\ f(x)=(x-2)\cdot i(x)+1$, gdzie $h(x)$ oraz $i(x)$ są wielomianami.

Z równości $(*)$, $(**)$, $(***)$ wynikają więc równości $a+b=f(1)=2$ i $2a+b=f(2)=1$, skąd otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para: $a=-1$, $b=3$. Poszukiwaną resztę stanowi więc wielomian:

$r(x)=-x+3$.

Przykład 4. Dla jakiej wartości m wielomian $W(x)=2mx^3-4x^2+mx-2m$ jest podzielny przez $x+1$?
Rozwiązanie:

Wiemy, że:

$x-c \mid W(x) \iff W(c)=0$ (zob. wniosek z twierdzenia Bézouta). Tutaj mamy $c=-1$.

Zatem:

$$x+1 \mid W(x) \iff W(-1)=0 \iff 2m\cdot(-1)^3-4\cdot(-1)^2+m(-1)-2m=0 \iff$$
$$\iff -2m-4-3m=0 \iff 5m=-4 \iff m=-\frac{4}{5}.$$

Odpowiedź: Omawiany wielomian jest podzielny przez $x+1$, jeśli $m=-\frac{4}{5}$.

Na koniec prześledźmy jeszcze jedno z zastosowań twierdzenia Bézouta.

Przykład 5*. Udowodnij, że liczba całkowita jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.
Rozwiązanie:

Niech $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ oznacza liczbę, w której a_0 jest cyfrą jedności, a_1 – cyfrą dziesiątek, a_2 – cyfrą setek itd. Wtedy $N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0$.

Rozpatrzmy wielomian $W(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$.

Zauważymy wówczas, że $W(10)=N$. Na mocy twierdzenia Bézouta mamy równość $W(x)=(x-1)\cdot P(x)+W(1)$, gdzie $P(x)$ jest oczywiście pewnym wielomianem, a także

$P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, bo $W(x)$ jest takim wielomianem, zaś $x-1$ jest unormowanym wielomianem o współczynnikach całkowitych (zob. zad. 11 w podrozdz. 3). Wobec tego $P(10)$ jest liczbą całkowitą. Stąd wynika, że:

$N = W(10) = 9 \cdot P(10) + W(1)$, ale $W(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Zatem:

$N - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = 9 \cdot P(10)$, co oznacza, że:

$9 \mid N - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$. Stąd:

$9 \mid N \iff 9 \mid a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

Pytania i zadania

1. Do czego służy schemat Hornera?
2. Sformułuj twierdzenie Bézouta i podaj wynikający z niego wniosek.
3. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ bez wykonywania dzielenia, gdy:

   a) $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5,\ P(x) = x - 3;$

   b) $W(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1,\ P(x) = x + 1;$

   c) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ P(x) = x - 2;$

   d) $W(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2,\ P(x) = x + \frac{1}{3}.$
4. Dla jakiej wartości m resztą z dzielenia wielomianu $f(x) = 3x^3 + mx^2 - 4x + 2$ przez wielomian $g(x) = x - 2$ jest liczba 6?

5*. Wielomian $P(x)$ z dzielenia przez $x + 1$ daje resztę 3, a przy dzieleniu przez $x + 2$ daje resztę 4. Jaką resztę otrzymamy z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x^2 + 3x + 2$?

6. Dla jakiej wartości a wielomian $W(x) = a^2x^3 - 3ax^2 - 6x - 2a$ jest podzielny przez $x + 1$?
7. Czy wielomiany $f(x) = 5(x^2 - 6x + 5) - x(x^2 - 3x + 2)$ i $g(x) = (x^2 - 4)(x + 3)$ są podzielne przez $x - 1$?

8*. Udowodnij, że wielomian jest podzielny przez $x - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego współczynników jest równa 0, natomiast przez $x + 1$ jest podzielny wtedy i tylko wtedy, gdy suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej jest równa sumie współczynników przy nieparzystych potęgach zmiennej.

9**. Resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 - 3x + 2$ jest wielomian $R(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 1$.

5. Pierwiastek wielomianu i jego krotność

Wiemy, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $x - c$, co zapisujemy krótko:

$$f(c) = 0 \iff (x-c) \mid f(x).$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są różne, to wielomian $f(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - c_1, x - c_2, \ldots, x - c_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielny przez ich iloczyn $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$.

☐ Dowód. Jeżeli wielomian $f(x)$ jest podzielny przez iloczyn $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$, to ma postać $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)\cdot g(x)$, gdzie $g(x)$ jest pewnym wielomianem. Wielomian $f(x)$ dzieli się więc przez każdy z dwumianów $x-c_1, x-c_2, \ldots, x-c_n$.

Załóżmy teraz na odwrót, że $f(x)$ dzieli się przez każdy z tych dwumianów. Ponieważ $(x-c_1) \mid f(x)$, więc $f(x)$ ma postać $(x-c_1)\cdot g_1(x)$, gdzie $g_1(x)$ jest pewnym wielomianem. Oczywiście $f(c_2) = 0$ i $c_2 - c_1 \neq 0$, zatem z faktu, że $x - c_2 \mid f(x) = (x-c_1)\cdot g_1(x)$, wynika, iż $x - c_2 \mid g_1(x)$. Stąd $g_1(x) = (x-c_2)\cdot g_2(x)$ i wobec tego $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdot g_2(x)$ dla pewnego wielomianu $g_2(x)$. Ale przecież także $f(c_3) = 0$ i $c_3 - c_1 \neq 0$ oraz $c_3 - c_2 \neq 0$, więc $g_2(c_3) = 0$, skąd $x - c_3 \mid g_2(x)$. Oznacza to, że $g_2(x) = (x-c_3)\cdot g_3(x)$, gdzie $g_3(x)$ jest pewnym wielomianem. Zatem $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdot g_3(x)$. Jeśli ten tok rozumowania zastosujemy do pozostałych liczb $c_4, c_5, \ldots, c_n$, otrzymamy ostatecznie, że $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)\cdot g_n(x)$ dla pewnego wielomianu $g_n(x)$. Stąd wynika, że $f(x)$ jest podzielny przez $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$. ☐

Wniosek. Każdy wielomian niezerowy może mieć co najwyżej tyle różnych pierwiastków rzeczywistych, ile wynosi jego stopień.

☐ Dowód. Rzeczywiście, przypuśćmy, że wielomian n-tego stopnia $f(x)$ ma p różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Z twierdzenia Bézouta wynika, że jest on podzielny przez każdy z dwumianów $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_p$, a zatem także przez ich iloczyn $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)$. Istnieje więc taki wielomian niezerowy $g(x)$, że $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)\cdot g(x)$. Z równości tej wynika, że st $f(x) =$ st $g(x) + p$, czyli że $n \geqslant p$, bo st $g(x) \geqslant 0$. ☐

Przykłady:

1) $x^2 - 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $n = 2$, $p = 2$, więc $p = n$;
2) $x^2 + 1$, brak pierwiastków rzeczywistych, więc $n = 2$, $p = 0$ i $p < n$;
3) $(x^2-4)(x^2+1)$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $n = 4$, $p = 2$, $p < n$, .

Może się zdarzyć, że wielomian $f(x)$ jest podzielny nie tylko przez pierwszą potęgę dwumianu $x - c$, ale także przez pewną potęgę tego dwumianu większą od 1. Mówimy wtedy, że liczba c jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$.

Liczbę c nazywamy **pierwiastkiem *m*-krotnym** wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $(x-c)^m$, natomiast nie jest podzielny przez $(x-c)^{m+1}$!

Zatem c jest pierwiastkiem m-krotnym wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $g(x)$, że $f(x)=(x-c)^m \cdot g(x)$ i $g(c) \neq 0$.

Jeżeli $m = 1$, to pierwiastek nazywamy **pojedynczym** lub **jednokrotnym**,
jeżeli $m = 2$, pierwiastek nazywamy **podwójnym** lub **dwukrotnym**,
jeżeli $m = 3$, wówczas pierwiastek nazywamy **potrójnym** lub **trzykrotnym** itd.

Liczbę m nazywamy **krotnością pierwiastka** c. Wobec tego możemy wyprowadzić kolejny wniosek.

Wniosek. Suma krotności wszystkich pierwiastków rzeczywistych niezerowego wielomianu nie przekracza stopnia tego wielomianu. Na przykład liczba 1 jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $x^4-3x^3+3x^2-x$, ponieważ $x^4-3x^3+3x^2-x=x\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=x(x-1)^3$, zaś liczby -1 i 2 są odpowiednio pierwiastkami dwukrotnym i czterokrotnym wielomianu $(x+1)^2(x-2)^4$. Rozpatrzmy jeszcze kilka przykładów.

Przykład 1. Napisz wielomian stopnia siódmego, którego pierwiastkiem dwukrotnym jest liczba 1, pierwiastkiem trzykrotnym liczba -3 i który nie ma innych pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie:

Wielomianem spełniającym warunki zadania jest na przykład wielomian:
$(x-1)^2(x+3)^3\left(x^2+1\right)$.

Przykład 2. Dla jakich wartości a i b liczba 2 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu
$W(x)=x^3+4x^2+ax+b^2$?
Rozwiązanie:

Należy oczywiście wyznaczyć takie wartości a i b, dla których $(x-2)^2 \mid W(x)$ i $(x-2)^3 \nmid W(x)$.

Pierwszy sposób:
Podzielmy wielomian $W(x)$ przez $(x-2)^2=x^2-4x+4$:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+4x^2+ax+b\right) \;:\; \left(x^2-4x+4\right)=x+8 \\
\underline{-\left(x^3-4x^2+4x\right)\qquad\qquad} \\
\quad = \quad 8x^2+(a-4)x+b \\
\qquad \underline{-\left(8x^2-32x+32\right)\qquad\quad} \\
\qquad\quad = \quad (a+28)x+(b-32).
\end{array}
$$

Z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x-2)^2$ otrzymaliśmy iloraz $x+8$ i resztę $(a+28)x+(b-32)$. Możemy zatem napisać równość:
$W(x)=(x+8)(x-2)^2+(a+28)x+(b-32)$.

Widzimy teraz, że:
$(x-2)^2 \mid W(x) \iff (a+28)x+(b-32) \equiv 0 \iff a+28=0$ i $b-32=0 \iff a=-28$ i $b=32$.

Oczywiście $(x-2)^3 \nmid W(x)$, gdyż $x-2 \nmid x+8$.

Odpowiedź: $a=-28$, $b=32$.

Drugi sposób:
Zastosujmy schemat Hornera. Sporządzamy tabelę:

	1	4	a	b
2	1	6	$a+12$	$2(a+12)+b$

z której odczytujemy współczynniki ilorazu i resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-2$. Mamy więc równość $W(x)=(x-2)\left(x^2+6x+a+12\right)+2(a+12)+b$.

Aby $x-2 \mid W(x)$, otrzymaną resztę przyrównujemy do zera. Następnie stosujemy schemat Hornera do wielomianu $x^2+6x+a+12$ i dwumianu $x-2$, by otrzymać iloraz i resztę z dzielenia tego wielomianu przez ten dwumian.

	1	6	$a+12$
2	1	8	$16+a+12$

Zatem $x^2+6x+(a+12)=(x-2)(x+8)+(a+28)$ i ostatecznie:

$$W(x)=(x-2)\left(x^2+6x+(a+12)\right)+2(a+12)+b=$$
$$=(x-2)((x-2)(x+8)+(a+28))+(2a+b+24)=$$
$$=(x-2)^2(x+8)+(x-2)(a+28)+(2a+b+24).$$

Stąd $(x-2)^2 \mid W(x) \iff a+28=0$ i $2a+b+24=0 \iff a=-28$ i $b=32$.

Przykład 3. Dla jakich wartości a, b i c liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$?

Rozwiązanie:

Współczynniki a, b i c tego wielomianu można wyznaczyć, rozumując jak poprzednio (spróbuj wyznaczyć je samodzielnie!). Teraz postąpimy jeszcze inaczej. Skoro liczba 1 ma być pierwiastkiem potrójnym wielomianu $f(x)$, to wielomian ten musi dzielić się bez reszty przez $(x-1)^3$. Ponieważ $f(x)$ jest unormowanym wielomianem stopnia czwartego, którego wyraz wolny jest równy -1, więc wielomian $f(x)=(x-1)^3(x+1)$. Z równości $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=(x-1)^3(x+1)$ otrzymujemy szukane wartości a, b i c, mianowicie $a=-2$, $b=0$, $c=2$.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o liczbie pierwiastków rzeczywistych wielomianu.
2. Co to jest pierwiastek m-krotny wielomianu?
3. Podaj przykład wielomianu, który ma dwa pierwiastki podwójne i jeden pierwiastek potrójny.
4. Dla jakich wartości m i n liczba -1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $f(x)=x^4+mx^3+(m-n)x^2+nx+1$?
5. Dla jakich wartości m i n liczba 2 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x)=x^4+(m-2)x^3+nx^2+(m+n)x+4$?
6. Wyznacz takie wartości a i b, dla których liczba 1 jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $f(x)=x^4-5x^3+9x^2+ax+b$.
7. Udowodnij, że jeżeli wielomian x^3+ax+b ma pierwiastek podwójny, to $4a^3+27b^2=0$.

6. Wzory Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia

Wzory Viète'a są to związki między współczynnikami wielomianu i jego pierwiastkami. Znamy już takie związki między współczynnikami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ i jego pierwiastkami. Wiemy bowiem, że liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu ax^2+bx+c, gdzie $a \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Podobne twierdzenie zachodzi dla wielomianów wyższych stopni, my jednak ograniczymy rozważania do wielomianów trzeciego i czwartego stopnia.

Twierdzenie 1.

Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równości:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

□ Dowód. Na mocy twierdzenia Bézouta liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten dzieli się przez każdy z dwumianów $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$, a więc również przez ich iloczyn $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Wobec tego wielomian $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, bo wielomiany $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ i $f(x)$ są wielomianami stopnia trzeciego i współczynnik kierujący wielomianu $f(x)$ równy jest a. Zachodzi zatem równość $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, czyli równość $ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - ax_1x_2x_3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, która jest równoważna równościom:

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \quad a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = c, \quad -ax_1x_2x_3 = d,$$

a te równościom:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \square$$

W podobny sposób można udowodnić kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Liczby x_1, x_2, x_3, x_4 są pierwiastkami wielomianu $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, gdzie $a \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równości:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a},$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a},$$
$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}.$$

Oto kilka przykładów zastosowań poznanych wzorów.

Przykład 1. Wielomian $W(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki: x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2$, zaś $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz współczynniki p i q.

Rozwiązanie:

Zgodnie z twierdzeniem Viète'a zachodzą równości:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$
$$x_1x_2x_3 = -q.$$

Z pierwszej równości, po uwzględnieniu równości podanych w zadaniu, otrzymujemy:
$x_1 + x_1 + x_1 - 6 = 0$, skąd $x_1 = 2$ i dalej $x_2 = x_1 = 2$ oraz $x_3 = x_1 - 6 = 2 - 6 = -4$.
Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są więc liczby: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$.
Korzystając ponownie ze wzorów Viète'a (tym razem z drugiego i trzeciego), otrzymujemy:
$p = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 = -14$,
$q = -x_1 x_2 x_3 = -2 \cdot 2 \cdot (-4) = 16$.
Odpowiedź: $p = -14$, $q = 16$.

Przykład 2. Dla jakich wartości a, b, c liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$?
Rozwiązanie:
Niech x_1, x_2, x_3, x_4 będą pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Z treści zadania wynika, że $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 \neq 1$. Z twierdzenia Viète'a $x_1 x_2 x_3 x_4 = -1$, skąd $x_4 = -1$.
Podstawiając otrzymane pierwiastki wielomianu $f(x)$ do pozostałych wzorów Viète'a, otrzymujemy kolejno:
$a = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -(1 + 1 + 1 - 1) = -2$,
$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 =$
$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0$,
$c = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) =$
$= -(1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1)) = -(1 - 1 - 1 - 1) = -(-2) = 2$.
Odpowiedź: $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$.

Przykład 3. Udowodnij, że jeżeli wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastek potrójny, to $bc = 9ad$.
Rozwiązanie:
Niech x_0 będzie pierwiastkiem potrójnym danego wielomianu. Zgodnie z twierdzeniem Viète'a, spełnia on równości:
$x_0 + x_0 + x_0 = -\frac{b}{a}$ (podstawiamy we wzorach Viète'a $x_1 = x_2 = x_3 = x_0$),
$x_0 \cdot x_0 + x_0 \cdot x_0 + x_0 \cdot x_0 = \frac{c}{a}$,
$x_0 x_0 x_0 = -\frac{d}{a}$,
czyli równości:
(1) $3x_0 = -\frac{b}{a}$; (2) $3x_0^2 = \frac{c}{a}$; (3) $x_0^3 = -\frac{d}{a}$.
Mnożąc stronami równości (1) i (2) oraz obie strony równości (3) przez 9, otrzymujemy:
$9x_0^3 = -\frac{bc}{a^2}$; $9x_0^3 = -\frac{9d}{a}$. Stąd $-\frac{bc}{a^2} = -\frac{9d}{a}$ i ostatecznie $bc = 9ad$.

Przykład 4*. Wykaż, że jeżeli wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$.
Rozwiązanie:
Niech liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 będą pierwiastkami danego wielomianu. Spełniają wówczas równości:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}$, $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$ (wzory Viète'a),
czyli równości:
(1) $b = -a(x_1 + x_2 + x_3)$; (2) $c = a(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$; (3) $d = -ax_1 x_2 x_3$.

Stąd:

$$b^2 = a^2(x_1 + x_2 + x_3)^2;\ ac = a^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1);\ bd = a^2(x_1 + x_2 + x_3)\,x_1x_2x_3.$$

Mamy dowieść, że $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$. Otóż:

$$b^2 \geqslant ac \iff a^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geqslant a^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \iff$$
$$\iff (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \iff$$
$$\iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \iff$$
$$\iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}\left[\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) + \left(x_3^2 + 2x_3x_1 + x_1^2\right)\right] \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2\right] \geqslant 0,\ \text{zaś:}$$
$$c^2 \geqslant bd \iff a^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \geqslant a^2(x_1 + x_2 + x_3)\,x_1x_2x_3 \iff$$
$$\iff (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \geqslant x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 \iff$$
$$\iff x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 \geqslant x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 +$$
$$+ x_1x_2x_3^2 \iff$$
$$\iff x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}\left[\left(x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^2x_3 + x_2^2x_3^2\right) + \left(x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3^2 + x_3^2x_1^2\right) +\right.$$
$$\left.+\left(x_3^2x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2\right)\right] \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{1}{2}\left[(x_1x_2 + x_2x_3)^2 + (x_2x_3 + x_3x_1)^2 + (x_3x_1 + x_1x_2)^2\right] \geqslant 0.$$

Pytania i zadania

1. Co to są wzory Viète'a?
2. Podaj wzory Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia.
3. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Napisz wielomian stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są liczby x_1x_2, x_2x_3 i x_1x_3.
4*. Udowodnij, że jeżeli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $a^2 \geqslant 3b$.
5. Wiedząc, że 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 13x + n$, wyznacz trzeci pierwiastek tego wielomianu oraz współczynniki m i n.
6. Udowodnij, że jeżeli dwa pierwiastki wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, są liczbami przeciwnymi, to $bc = ad$.
7. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie a i b są liczbami różnymi od zera. Wyznacz wartość wyrażenia $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)$.
8. Dla jakich a i b liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax + 1$?
9. Dla jakich a i b liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 5x^3 + 9x^2 + ax + b$?
10*. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu $x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$, wiedząc, że wszystkie jego pierwiastki są liczbami dodatnimi.

7. Wymierne pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych

Umiemy już wyznaczać pierwiastki wielomianów stopnia pierwszego i drugiego. Znalezienie pierwiastków wielomianu stopnia wyższego niż drugi może być zadaniem nie tylko trudnym, ale wręcz niemożliwym do rozwiązania. Istnieją, co prawda, wzory pozwalające wyznaczyć pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia trzeciego lub czwartego (tzw. wzory Cardana). Są one jednak bardzo skomplikowane. Z wielomianami stopnia co najmniej piątego jest znacznie trudniej. Okazuje się, że wzorów na pierwiastki takich wielomianów w ogóle nie ma. Mówiąc dokładniej, oznacza to istnienie takich wielomianów stopnia co najmniej piątego, których pierwiastków nie można wyrazić przez współczynniki tych wielomianów za pomocą czterech działań arytmetycznych oraz operacji wyciągania pierwiastków dowolnego stopnia.

W pewnych szczególnych przypadkach można znaleźć pierwiastki wielomianów nawet wyższych stopni. Pamiętajmy jednak, że poniższe twierdzenie nie stanowi ogólnej metody znajdowania pierwiastków dowolnego wielomianu.

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ są całkowite i liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny) jest pierwiastkiem tego wielomianu, to p jest dzielnikiem a_0, zaś q jest dzielnikiem a_n.

□ Dowód. Skoro $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, to:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad / \cdot q^n,$$

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$ Stąd:

$(*)\ a_n p^n = -q\left(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$ oraz:

$(**)\ a_0 q^n = -p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right).$

Ponieważ liczba całkowita po prawej stronie równości $(*)$ jest podzielna przez q, więc także $a_n p^n$ jest podzielne przez q. Wobec tego liczba a^n jest podzielna przez q, gdyż liczby p i q (a zatem także p^n i q) są względnie pierwsze, na mocy założenia o nieskracalności ułamka $\frac{p}{q}$. □

Analogicznie z równości $(**)$ odczytujemy, że a_0 jest podzielne przez p.

Z twierdzenia tego można wyprowadzić dwa wnioski:

Wniosek 1. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą będącą dzielnikiem wyrazu wolnego.

□ Dowód. Przyjmując $a_n = 1$ w wielomianie $f(x)$, otrzymujemy, że $q|1$, skąd $q = \pm 1$. Zatem liczba wymierna $\frac{p}{q} = \pm p$, będąca pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, jest całkowita i jest dzielnikiem współczynnika a_0. □

Wniosek 2. Jeżeli żaden z dzielników wyrazu wolnego unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych nie jest pierwiastkiem tego wielomianu, to każdy rzeczywisty pierwiastek tego wielomianu (jeśli taki istnieje) jest liczbą niewymierną.

Pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych należy więc poszukiwać wyłącznie wśród dzielników wyrazu wolnego tego wielomianu.

Przykład 1. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$.

Rozwiązanie:

Pierwiastków wymiernych tego wielomianu poszukujemy wśród liczb $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{6}{11}$. Są to bowiem wszystkie liczby wymierne $\frac{p}{q}$ takie, że $q \mid 11$ i $p \mid 6$.

Stwierdzamy, że spośród wypisanych liczb tylko -1 i $\frac{2}{11}$ są pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu. Dzielimy dany wielomian przez wielomian $(x+1)\left(x - \frac{2}{11}\right)$ i otrzymujemy wielomian stopnia drugiego, którego pierwiastki rzeczywiste (jeśli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami danego wielomianu.

Mamy: $\left(11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 1\right) : (x+1)\left(x - \frac{2}{11}\right) = 11\left(x^2 - 3\right)$.

Pozostałymi pierwiastkami rzeczywistymi danego wielomianu są liczby: $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Jedynymi pierwiastkami wymiernymi wielomianu są liczby: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{11}$.

Przykład 2. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Wówczas mamy $x_0^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, czyli $x_0^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Stąd $\left(x_0^2 - 5\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$, czyli $x_0^4 - 10x_0^2 + 25 = 24$ i ostatecznie $x_0^4 - 10x_0^2 + 1 = 0$.

Liczba x_0 jest więc pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 10x^2 + 1$. Gdyby była liczbą wymierną, musiałaby być liczbą całkowitą (wielomian $x^4 - 10x^2 + 1$ ma współczynniki całkowite i jest unormowany) i dzielnikiem 1. Sprawdzamy jednocześnie, że żadna z liczb -1 i 1 nie jest pierwiastkiem tego wielomianu. Liczba x_0, jako pierwiastek tego wielomianu, nie może być liczbą wymierną. Jest więc liczbą niewymierną.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o wymiernym pierwiastku wielomianu o współczynnikach całkowitych.
2. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianów:

   a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$; c) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$;
   d) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$; e) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$; f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$;
   g) $2x^3 - x^2 - 4x + 2$; h) $2x^3 + 3x^2 - 1$.
3. Wykaż, że następujące liczby są niewymierne:

   a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2} + 1$; d) $\sqrt{2} + \sqrt{10}$; e) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

4*. Udowodnij, że jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych, to nie ma pierwiastków całkowitych.

5*. Udowodnij, że jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych, to nie ma on pierwiastków całkowitych.

8. Rozkład wielomianu na czynniki

Mówimy, że wielomian jest **rozkładalny**, jeśli można przedstawić go w postaci **iloczynu wielomianów stopnia dodatniego**. Jeżeli natomiast taki **rozkład nie istnieje**, to wielomian jest **nierozkładalny**. Wiemy, że nie każdy trójmian kwadratowy o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki liniowe o współczynnikach rzeczywistych, mianowicie nie da się przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych trójmianu o ujemnym wyróżniku. Często będzie nas interesował rozkład wielomianu o współczynnikach wymiernych na czynniki, które są wielomianami stopnia dodatniego o współczynnikach wymiernych.

Przykład 1. Wielomian x^2-2 jest rozkładalny, bo $x^2-2=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$. Jednak niemożliwy się okazuje rozkład tego wielomianu na czynniki o współczynnikach wymiernych.

Istotnie, gdyby to było możliwe, musiałyby istnieć takie liczby wymierne a, b, c, d, że $x^2-2=(ax+b)(cx+d)$. Stąd otrzymalibyśmy równości:

$$ac=1,\ \ ad+bc=0,\ \ bd=-2.$$

Po wyznaczeniu z pierwszego równania c, z trzeciego zaś d i podstawieniu wartości $c=\frac{1}{a}$ oraz $d=-\frac{2}{b}$ do drugiego równania otrzymamy: $0=a\cdot d+b\cdot c=a\cdot\left(-\frac{2}{b}\right)+b\cdot\frac{1}{a}=-\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}$, a stąd $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$, czyli $\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$. Ta ostatnia równość dla liczb wymiernych a i b zachodzić jednak nie może, gdyż $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Przykład ten pokazuje, że należy przyjąć następującą definicję wielomianu rozkładalnego:

Wielomian $f(x)$ nazywamy rozkładalnym na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych (odpowiednio: wymiernych), jeśli istnieją takie wielomiany $g(x)$ i $h(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych (odpowiednio: wymiernych), że:

$$f(x)=g(x)\cdot h(x).$$

Przykład 2. Wielomian x^4+2 jest rozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, bo:

$$x^4+2=\left(x^4+2\sqrt{2}\,x^2+1\right)-2\sqrt{2}\,x^2=$$

$$=\left(x^2+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\,x\right)^2=\left(x^2-\sqrt{2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right),$$

ale nie jest rozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych. Gdyby bowiem taki rozkład istniał, musiałby to być:

a) albo rozkład na iloczyn wielomianu stopnia pierwszego i wielomianu stopnia trzeciego,

b) albo rozkład na iloczyn dwóch wielomianów stopnia drugiego.

Pierwszy przypadek zajść nie może, gdyż wtedy wielomian x^4+2 musiałby mieć pierwiastek rzeczywisty, a nie ma go, ponieważ $x^4+2>0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Gdyby zaś zachodził drugi przypadek, musiałyby istnieć takie liczby wymierne a, b, c i d, że:

$x^4+2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$, czyli:

$x^4+2=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd$, skąd:

$a+c=0,\ b+ac+d=0,\ ad+bc=0,\ bd=2.$

Po wyznaczeniu z pierwszego równania c, z czwartego d i podstawieniu tych wartości: $c=-a$ i $d=\frac{2}{b}$ do drugiego i trzeciego równania otrzymujemy: $0=b+ac+d=b-a^2+\frac{2}{b}$ oraz $0=ad+bc=a\cdot\frac{2}{b}-ab$, skąd $b+\frac{2}{b}=a^2$ i $\frac{2a}{b}=ab$.

Jeśli $a\neq 0$, to z równości $\frac{2a}{b}=ab$ wynika, że $b^2=2$, co jest niemożliwe, ponieważ $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Gdy zaś $a=0$, to z równości $b+\frac{2}{b}=0$ otrzymujemy $b^2=-2$, co także nie może zajść. Zatem nie istnieje rozkład wielomianu x^4+2 na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli wielomian $f(x)$ stopnia co najmniej drugiego o współczynnikach rzeczywistych (wymiernych) ma pierwiastek rzeczywisty (odpowiednio: wymierny), to jest rozkładalny na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych (odpowiednio: wymiernych).

□ Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeżeli a jest pierwiastkiem rzeczywistym (wymiernym) wielomianu $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, to istnieje taki wielomian $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych (wymiernych), że:

$f(x)=(x-a)\cdot g(x)$.

Przykład wielomianu x^4+2 pokazuje, że twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe; wielomian rozkładalny może nie mieć pierwiastków rzeczywistych. □

Podamy na koniec bez dowodu jeszcze jedno ważne twierdzenie:

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów)

Jedynymi wielomianami nierozkładalnymi na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych są wielomiany stopnia pierwszego oraz wielomiany stopnia drugiego o wyróżniku ujemnym.

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek:

Wniosek. Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

□ Dowód. Wielomian stopnia nieparzystego jest albo wielomianem stopnia pierwszego, to jest postaci $ax+b$, gdzie $a\neq 0$, albo wielomianem stopnia nieparzystego większego od 1, w którego rozkładzie na czynniki nierozkładalne występuje wielomian stopnia pierwszego. Ma zatem co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. □

Rozkładając wielomiany na czynniki, stosujemy wzory skróconego mnożenia lub grupujemy wyrazy przez wyłączenie wspólnych czynników poza nawiasy (jeżeli takie wspólne czynniki istnieją).

Przykład 3.

$$(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)=3(x-2)(x-1)(x+1)-5(x-2)(x-1)=$$
$$=(x-2)(x-1)(3(x+1)-5)=(x-2)(x-1)(3x-2);$$

$$(a^2-9)^2-(a+3)^2=(a-3)^2(a+3)^2-(a+3)^2=(a+3)^2\left((a-3)^2-1\right)=$$
$$=(a+3)^2(a-3-1)(a-3+1)=(a+3)^2(a-4)(a-2);$$

$$4t^2-4t+1-2t(2t-1)+18t^3-9t^2=(2t-1)^2-2t(2t-1)+9t^2(2t-1)=$$
$$=(2t-1)(2t-1-2t+9t^2)=(2t-1)(9t^2-1)=(2t-1)(3t-1)(3t+1);$$

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1);$$

$$x^4-5x^2+6=x^4-2x^2-3x^2+6=(x^4-2x^2)-(3x^2-6)=$$
$$=x^2(x^2-2)-3(x^2-2)=(x^2-2)(x^2-3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

Pytania i zadania

1. Jaki wielomian nazywamy rozkładalnym, a jaki nierozkładalnym?
2. Podaj zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów oraz wynikający z niego wniosek.
3. Rozłóż na czynniki wielomiany:
   a) $x^2(x-1)-4(x-1)$; b) $2x^2(x+3)-4x(x+3)$;
   c) $3t^2(2t-5)-9(6t-15)$; d) $(x^2-9)(x^2-6x+9)$;
   e) $(-3y^4+3y)(y^2-1)$; f) $5(x^3+1)(4x^2-4x+1)$.
4. Rozłóż na czynniki wielomiany:
   a) $3x^3-2x^2+3x-2$; b) $t^5-2t^3-t^2+2$; c) $4y^4-2y^3-2y+1$;
   d) $2x^3-x^2+4x-2$; e) $5x^3-2x^2-15x+6$; f) x^3-7x-6.
5. Rozłóż na czynniki wielomiany:
   a) $(4x^2-25)^2-(2x+5)^2$; b) $5(4-x^2)-(x-2)^2$; c) x^6-1;
   d) x^7-x; e) $x^4-5x^3+6x^2$; f) x^4-4x^2+4.
6. Rozłóż na czynniki wielomiany:
   a) $2x^3+9x^2-6x-5$; b) $y^4-y^3-7y^2+y+6$; c) $3t^3-14t^2+13t+6$;
   d) x^4-5x^2+4; e) t^6+7t^3-8; f) $2x^5-2x^3-12x$.

7*. Rozłóż na czynniki wielomiany:

a) $x^4 + 1$; b) $x^8 + x^4 + 1$; c) $x^9 - 1$.

8*. Wykaż, że następujące wielomiany są nierozkładalne na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych:

a) $x^2 + 2$; b) $x^2 - 3$; c) $x^4 - 5x^2 + 6$;

d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; e) $x^3 - 10x^2 + 5x + 1$; f) $x^4 + 3$.

9*. Wyznacz taką liczbę całkowitą a, dla której wielomian $(x-a)(x-10)+1$ jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia pierwszego o współczynnikach całkowitych.

10*. Udowodnij, że nie istnieje rozkład wielomianu $(x-1)(x-2)(x-3)-1$ na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych.

11**. Rozłóż na czynniki wyrażenie $W = x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$.

9. Równania wielomianowe

Poszukiwanie pierwiastków wielomianów prowadzi do rozwiązywania równań zwanych wielomianowymi lub też algebraicznymi.

!

Równanie postaci $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, w którym x jest niewiadomą, $a_n \neq 0$, zaś $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są to liczby dane, nazywamy **równaniem wielomianowym stopnia *n*-tego** lub **równaniem algebraicznym stopnia *n*-tego.**

Na przykład:
- równanie $3x^2 - 2x + 1 = 0$ jest równaniem stopnia drugiego,
- równanie $x^3 - 6x + 7 = 0$ jest równaniem stopnia trzeciego.

Równania pierwszego i drugiego stopnia rozwiązywano już w starożytności.

Ogólne wzory na pierwiastki równań trzeciego i czwartego stopnia (zwane wzorami Cardana – o czym wspominaliśmy wcześniej) wyprowadzono już w XVI wieku. Mimo licznych prób podania podobnych wzorów na pierwiastki równań stopnia co najmniej piątego nie udało się tego dokonać aż do wieku XIX, kiedy to wykazano, że... wzory takie nie istnieją.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania równań algebraicznych, podając ogólne informacje o metodach ich rozwiązywania.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $2x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$.
Rozwiązanie:

Rozkładamy najpierw wielomian $2x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ na czynniki możliwie najniższego stopnia. Mamy:

$$2x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = (2x^3 + 2x^2) - (3x+3) = 2x^2(x+1) - 3(x+1) =$$
$$=(x+1)(2x^2-3) = 2(x+1)\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) = 2(x+1)\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Zatem:

$$2x^3+2x^2-3x-3=0 \iff \left(x+1=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{\frac{3}{2}}=0, \quad \text{lub} \quad x+\sqrt{\frac{3}{2}}=0\right) \iff$$

$$\iff \left(x=-1 \quad \text{lub} \quad x=\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{lub} \quad x=-\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Odpowiedź: Pierwiastkami równania są liczby: $x_1=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ x_2=-1,\ x_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $x^5-x=0$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $x^5-x=x\left(x^4-1\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$ oraz: $x^2+1>0$ dla każdego x, więc:

$$x^5-x=0 \iff (x=0 \quad \text{lub} \quad x-1=0, \quad \text{lub} \quad x+1=0) \iff$$

$$\iff (x=0 \quad \text{lub} \quad x=1, \quad \text{lub} \quad x=-1).$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby: $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $t^4-6t^3+9t^2-4=0$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $t^4-6t^3+9t^2-4=$

$$=\left(t^2-3t\right)^2-2^2=\left(t^2-3t-2\right)\left(t^2-3t+2\right)=$$

$$=\left(t-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(t-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)(t-1)(t-2), \text{ więc:}$$

$$t^4-6t^3+9t^2-4=0 \iff \left(t-\frac{3-\sqrt{17}}{2}=0 \quad \text{lub} \quad t-\frac{3+\sqrt{17}}{2}=0, \quad \text{lub} \quad t-1=0,\right.$$

$$\left.\text{lub} \quad t-2=0\right) \iff \left(t=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{lub} \quad t=\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \quad \text{lub} \quad t=1, \quad \text{lub} \quad t=2\right).$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby: $t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ t_2=1,\ t_3=2,\ t_4=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $x^8+3x^6+5x^4+7x^2+9=0$.
Rozwiązanie:

Wiemy, że $x^8\geqslant 0,\ x^6\geqslant 0,\ x^4\geqslant 0,\ x^2\geqslant 0$ dla każdego x, więc $x^8+3x^6+5x^4+7x^2+9>0$ dla każdego x. Zatem równanie to nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $y^6-1=0$.
Rozwiązanie:

Mamy $y^6-1=\left(y^3+1\right)\left(y^3-1\right)=$

$$=(y+1)\left(y^2-y+1\right)(y-1)\left(y^2+y+1\right)=(y+1)(y-1)\left(y^2-y+1\right)\left(y^2+y+1\right).$$

Ponieważ $y^2-y+1>0,\ y^2+y+1>0$ dla każdego y (dlaczego?), więc:

$$y^6-1=0 \iff (y+1)(y-1)=0 \iff y=-1 \text{ lub } y=1.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby: $y_1=-1,\ y_2=1$.

Przykład 6. Rozwiąż równanie $x^4-7x^3+18x^2-20x+8=0$.
Rozwiązanie:

Sprawdzamy najpierw, czy pierwiastkiem tego równania nie jest któryś z dzielników liczby 8, a więc jedna z liczb: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Okazuje się, że pierwiastkami tymi są liczby 1 i 2.

Dzielimy wielomian $x^4-7x^3+18x^2-20x+8$ przez $(x-1)(x-2)$ i otrzymujemy iloraz x^2-4x+4. Mamy więc rozkład tego wielomianu:

$x^4-7x^3+18x^2-20x+8=(x-1)(x-2)^3$. Stąd:

$$x^4-7x^3+18x^2-20x+8=0 \iff \left(x-1 \text{ lub } (x-2)^3=0\right) \iff$$

$$\iff (x=1 \text{ lub } x=2).$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby: $x_1=1$, $x_2=x_3=x_4=2$.

Przykład 7*. Rozwiąż równanie $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3} \iff x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0 \iff 3x^3+3x^2+3x+1=0$ oraz:

$$3x^3+3x^2+3x+1=2x^3+\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\,x\right)^3+(x+1)^3=$$

$$=\left(\sqrt[3]{2}\,x+x+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{2}\,x\right)^2-\sqrt[3]{2}\,x(x+1)+(x+1)^2\right]=$$

(skorzystaliśmy tu ze wzorów na sześcian sumy i sumę sześcianów dwóch wyrażeń)

$$=\left[\left(\sqrt[3]{2}+1\right)x+1\right]\cdot\left[\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)x^2+\left(2x-\left(\sqrt[3]{2}\right)x+1\right)\right]$$

i trójmian $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)x^2+\left(2-\sqrt[3]{2}\right)x+1$ przyjmuje tylko wartości dodatnie (sprawdź, że wyróżnik tego trójmianu jest ujemny!), więc:

$$x^3+x^2+x=-\frac{1}{3} \iff \left(\sqrt[3]{2}+1\right)x+1=0 \iff x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}.$$

Odpowiedź: Pierwiastkiem rzeczywistym (jedynym!) tego równania jest liczba $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Pytania i zadania

1. Co to jest równanie algebraiczne stopnia n-tego?
2. Rozwiąż równania:

   a) $x^3+x^2-x-1=0$; b) $x^3-x^2-x+1=0$; c) $x^3+2x^2-4x-8=0$;

   d) $x^3-3x+2=0$; e) $x^3-10x+9=0$; f) $3x^4-10x^3+10x-3=0$.

3. Rozwiąż równania:

   a) $8x^3-4x^2-2x+1=0$; b) $x^6-9x^3+8=0$; c) $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$;

   d) $x^3-2x^2-5x+6=0$; e) $\left(x^2-x\right)^2=x^2-x+132$; f) $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$.

4**. Rozwiąż równania:

   a) $68x^8-257x^6-257x^2+68=0$; b) $36x^3-x+1=0$; c) $\left(1+x^2\right)^2=4x\left(1-x^2\right)$.

10. Nierówności wielomianowe

Każdą z nierówności postaci: $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geqslant 0$, $W(x) \leqslant 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n-tego, nazywamy **nierównością algebraiczną stopnia n-tego** lub **nierównością wielomianową stopnia n-tego**.

Na przykład:

a) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1 > 0$ jest nierównością algebraiczną czwartego stopnia lub krócej: nierównością czwartego stopnia,

b) $x^3 - 3x + 2 \leqslant 0$ jest nierównością trzeciego stopnia.

Jak dotąd nierówności, które rozwiązywaliśmy, były stopnia pierwszego (tzw. nierówności liniowe) lub stopnia drugiego (zwane też nierównościami kwadratowymi).

Rozwiązywanie nierówności algebraicznych stopnia co najmniej trzeciego sprowadzać będziemy do rozwiązywania nierówności pierwszego i drugiego stopnia. Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można bowiem, w myśl zasadniczego twierdzenia teorii wielomianów, rozłożyć na czynniki pierwszego i drugiego stopnia. Jeżeli potrafimy znaleźć taki rozkład, to badanie znaku wielomianu sprowadza się do badania znaku poszczególnych czynników otrzymanych przy rozkładzie, a więc do rozwiązywania nierówności liniowych i kwadratowych. Objaśnimy to na kilku przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż nierówność $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 > 0$.

Rozwiązanie:

Wielomian $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ ma, co nietrudno stwierdzić, pierwiastek 1, jest więc podzielny przez $x - 1$. Po wykonaniu tego dzielenia (albo zastosowaniu schematu Hornera) otrzymujemy:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x-1)(x^2 - x + 3).$$

Zatem daną nierówność można zapisać w postaci $(x-1)(x^2-x+3) > 0$.

Ponieważ $x^2 - x + 3 > 0$ dla każdego x, bo wyróżnik trójmianu $x^2 - x + 3$ wynosi $1 - 12 = -11 < 0$, zaś współczynnik przy x^2 jest równy 1, więc:

$$(x-1)(x^2-x+3) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(1; +\infty)$.

Przykład 2. Rozwiąż nierówność $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 > 0$.

Rozwiązanie:

Szukamy pierwiastków wielomianu $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ wśród dzielników jego wyrazu wolnego, którym jest 24, i stwierdzamy, że są nimi liczby 1, 2, 3, 4. Mamy zatem równość $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Wobec tego należy rozwiązać nierówność:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0.$$

W tym celu badamy znaki czynników $x-1$, $x-2$, $x-3$ i $x-4$ dla różnych wartości zmiennej x. Uzyskane wyniki zestawiamy w tabelce, otrzymując tak zwaną „siatkę znaków":

x	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x<4$	4	$x>4$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
iloczyn	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Z ostatniego wiersza tabelki odczytujemy, że:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0 \iff (x<1 \text{ lub } 2<x<3, \text{ lub } x>4).$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest suma przedziałów: $(-\infty;1)$, $(2;3)$ i $(4;+\infty)$, a więc zbiór: $(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $2x^3+2x^2-3x-3\leqslant 0$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy najpierw wielomian $2x^3+2x^2-3x-3$ na czynniki:

$$2x^3+2x^2-3x-3=\left(2x^3+2x^2\right)-(3x+3)=2x^2(x+1)-3(x+1)=$$

$$=(x+1)\left(2x^2-3\right)=2(x+1)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Badamy znaki czynników: $x+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x+1$, $x-\sqrt{\frac{3}{2}}$ dla różnych wartości zmiennej x:

x	$x<-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}<x<-1$	-1	$-1<x<\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x>\sqrt{\frac{3}{2}}$
$x+\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
iloczyn	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Zatem:

$$2x^3+2x^2-3x-3\leqslant 0 \iff 2\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)(x+1)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\leqslant 0 \iff x\leqslant-\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ lub}$$
$$-1\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle\cup\left\langle-1;\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$.

Przykład 4. Rozwiąż nierówność $\left(x^2-4x-12\right)\left(x^2+9\right)<0$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $x^2+9>0$ dla każdej liczby x, więc:

$$\left(x^2-4x-12\right)\left(x^2+9\right)<0 \iff x^2-4x-12<0.$$

Nierówność $x^2-4x-12<0$ rozwiązujemy w znany sposób i otrzymujemy:

$$x^2-4x-12<0 \iff -2 \leqslant x<6.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-2;6)$.

Przykład 5*. Rozwiąż równanie $\left|x^9-x\right|+\left|x^8-x^7\right|=\left|x^9-x^8+x^7-x\right|$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$\left|x^9-x\right|+\left|x^8-x^7\right|=\left|x^9-x^8+x^7-x\right| \iff$$

$$\iff \left|x^9-x\right|+\left|x^8-x^7\right|=\left|\left(x^9-x\right)+\left(x^7-x^8\right)\right| \iff$$

$$\iff \left(x^9-x\right)\left(x^7-x^8\right)\geqslant 0, \text{ bo } |-a|=|a| \text{ i } |a+b|=|a|+|b| \iff ab\geqslant 0.$$

Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania nierówności $\left(x^9-x\right)\left(x^7-x^8\right)\geqslant 0$.

Rozwiązując ją, otrzymujemy:

$$\left(x^9-x\right)\left(x^7-x^8\right)\geqslant 0 \iff x\left(x^8-1\right)\left(-x^7\right)(x-1)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff -x^8\left(x^4+1\right)\left(x^4-1\right)(x-1)\geqslant 0 \iff -x^8\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)(x-1)\geqslant 0 \iff$$

$$\iff -x^8\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)^2\geqslant 0 \iff$$

$$\iff -(x+1)x^8(x-1)^2\geqslant 0, \text{ bo } x^4+1>0 \text{ i } x^2+1>0$$

dla każdej liczby rzeczywistej x, zaś $-(x+1)x^8(x-1)^2\geqslant 0 \iff x\leqslant -1$ lub $x=0$, lub $x=1$, bo $x^8\geqslant 0$ i $(x-1)^2\geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danego równania jest $(-\infty;-1\rangle \cup \{0,1\}$.

Przykład 6*. Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
Rozwiązanie:

Dla $x<0$ wszystkie składniki stojące po lewej stronie nierówności są dodatnie, więc nierówność ta jest spełniona dla $x<0$.

Gdy $0\leqslant x<1$, to $1-x>0$, $x^4-x^9\geqslant 0$, $x^{12}\geqslant 0$, więc:

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+\left(x^4-x^9\right)+(1-x)>0.$$

Gdy wreszcie $x\geqslant 1$, to $x^{12}-x^9\geqslant 0$, $x^4-x\geqslant 0$, $1>0$, stąd:

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=\left(x^{12}-x^9\right)+\left(x^4-x\right)+1>0.$$

Wobec tego dana nierówność jest spełniona dla wszystkich $x\in\boldsymbol{R}$.

Metoda „siatki znaków" nie jest jedyną, za pomocą której można otrzymać zbiór rozwiązań nierówności wielomianowej. Znacznie szybciej uzyskujemy ten zbiór, szkicując wykres wielomianu i na tej podstawie odczytując interesujący nas znak wielomianu.

Przed rozwiązaniem kolejnych przykładów warto poznać kilka ogólnych wiadomości. Jeżeli $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$, to dla $x \neq 0$ możemy $f(x)$ zapisać jako:

$$f(x)=x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}\right).$$

Teraz widzimy, że dla dostatecznie dużych wartości x wartości $f(x)$ są dowolnie duże, gdy $a_n > 0$, zaś dowolnie małe, gdy $a_n < 0$, co zapisujemy:

$$(x \to +\infty) \Rightarrow \left(f(x) \to \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{gdy } a_n < 0, \end{cases} \right)$$

i czytamy: gdy x dąży do plus nieskończoności, to $f(x)$ dąży do plus nieskończoności, gdy $a_n > 0$, zaś do minus nieskończoności, gdy $a_n < 0$. Wynika to stąd, że gdy x dąży do plus nieskończoności, wtedy $\frac{1}{x}$ dąży do zera, a zatem każdy ze składników sumy:

$$a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}$$

(poczynając od drugiego od lewej strony) dąży do zera, cała suma zaś do a_n.

Dlatego podczas szkicowania wykresu wielomianu:

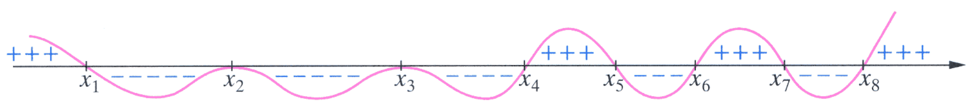
$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ gdzie } a_n \neq 0,$$

idąc wzdłuż osi x od prawej do lewej, zaczynamy szkicować od góry, gdy $a_n > 0$, zaś od dołu, gdy $a_n < 0$. Wykres ten przecina oś x w punktach odpowiadających pierwiastkom o krotności nieparzystej (w szczególności pojedynczym) wielomianu $f(x)$, natomiast jest styczny do osi x w punktach odpowiadających pierwiastkom o krotności parzystej tego wielomianu.

Poniżej przedstawiono wykres wielomianu $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mającego współczynnik a_n dodatni i pierwiastki:

$x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ – krotności nieparzystej,

x_2 i x_3 – krotności parzystej.



Ryc. 2.1.

Z wykresu odczytujemy, że:

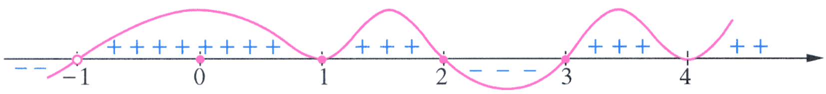
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; x_7) \cup (x_8; +\infty)$,

zaś $f(x) < 0$ dla $x \in (x_1; x_2) \cup (x_2; x_3) \cup (x_3; x_4) \cup (x_5; x_6) \cup (x_7; x_8)$.

Przykład 7. Rozwiąż nierówność $(x+1)(x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)^4 < 0$.
Rozwiązanie:

Lewa strona tej nierówności jest wielomianem jedenastego stopnia o współczynniku przy x^{11} równym 1 (a więc dodatnim) i mającym pierwiastki: pojedyncze –1 i 3, podwójny 1, potrójny 2 i czterokrotny 4.

Oto szkic wykresu tego wielomianu:



Ryc. 2.2.

Z powyższego wykresu wielomianu odczytujemy, że:

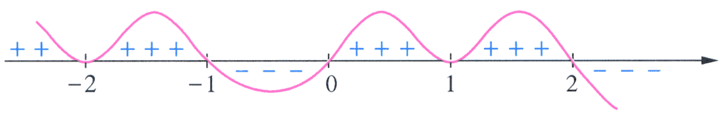
$(x+1)(x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)^4 < 0$ dla $x < -1$ lub $2 < x < 3$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty; -1) \cup (2; 3)$.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność $-2(x+2)^2(x+1)x^3(x-1)^4(x-2) > 0$.
Rozwiązanie:

Pierwiastkami wielomianu stojącego po lewej stronie danej nierówności są: liczby –1, 0 i 2-krotności nieparzystej, liczby –2 i 1-krotności parzystej.

Współczynnik przy zmiennej x w najwyższej potędze wynosi –2. Po naszkicowaniu wykresu tego wielomianu otrzymujemy zatem:



Ryc. 2.3.

Stąd odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności – jest nim:
$(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest nierówność stopnia n-tego?
2. Czy nierówność trzeciego stopnia może nie mieć rozwiązań?
3. Czy nierówność czwartego stopnia może nie mieć rozwiązań?
4. Rozwiąż nierówności:

a) $(4x+1)(x^2+1) < 0$;

b) $(2x-1)(5x-1)(7x-1) \geqslant 0$;

c) $4x^3 - 3x - 1 \leqslant 0$;

d) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 > 0$;

e) $(x-2)(x^2-4)(x-3)^4(x-4)^2(x-5)<0$;

f) $(x^2-5x-6)(x-2)^2<0$;

g) $x^3-4x>7x^2-28$.

5*. Rozwiąż równanie $|x^4-4|-|x^2+2|=|x^4-x^2-6|$.

6*. Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności:

a) $x^8+x^6-4x^4+x^2+1 \geqslant 0$;

b) $x^{16}-x^{11}+x^6-x+1>0$

jest zbiór $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

7. Dla jakich wartości a reszta z dzielenia wielomianu $f(x)=x^5-x^4-5ax^2+5ax+6x-4$ przez wielomian $x-a$ jest mniejsza od 2?

8. Rozwiąż nierówności:

a) $x^3+3x^2-4x-12<0$;

b) $x^3+5x^2-2x-10>0$;

c) $x^3-3x^2+3x-2 \geqslant 0$;

d) $x^3+x^2-4x-4 \leqslant 0$.

9. Rozwiąż nierówności:

a) $x^3-5x^2>8x-48$;

b) $x^3-14x^2+65x>100$;

c) $x-6>x^3+2x^2$;

d) $x^4+2x>3x^2$.

10*. Dla jakich wartości n liczba 1 zawarta jest między rozwiązaniami równania $x^2-(m^2-1)x+m^3-20=0$?

III. Funkcja wymierna

1. Pojęcie funkcji wymiernej i działania na funkcjach wymiernych

Wykonując działania na wielomianach, przekonaliśmy się, że iloraz dwóch wielomianów na ogół nie jest wielomianem, a reszta otrzymana z dzielenia wielomianu przez wielomian nie zawsze okazywała się wielomianem zerowym. W wyniku tych działań otrzymujemy zatem funkcje, które nie są wielomianami.

Funkcję postaci $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami wielomianowymi jednej zmiennej rzeczywistej, nazywamy **funkcją wymierną** jednej zmiennej rzeczywistej. Zakładamy przy tym, że $g(x)\not\equiv 0$.

Ponieważ funkcje wielomianowe są określone dla każdej liczby rzeczywistej, więc funkcja wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika.

Zatem, jeśli $A=\{x\in \boldsymbol{R}; g(x)=0\}$, to dziedziną funkcji wymiernej $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus A$.

Przykłady:

1. Funkcja $F(x)=\frac{x+1}{x-1}$ jest funkcją wymierną, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$.

2. Funkcja $G(x)=\frac{x^2+1}{x}$ jest funkcją wymierną, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

3. Funkcja $H(x)=\frac{x}{x^2+1}$ jest funkcją wymierną, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}$, gdyż $\{x\in \boldsymbol{R}; x^2+1=0\}=\varnothing$.

Zauważmy, że jeżeli wielomian $g(x)$ jest stałą różną od zera, to $F(x)$ jest wielomianem.

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją wymierną.

Niektóre funkcje wymierne, jeśli spełniają określone warunki, stają się funkcjami równoważnymi.

Dwie funkcje wymierne $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy **równoważnymi**, jeżeli są równe we wszystkich punktach, w których są jednocześnie określone.

Można to prześledzić na następujących przykładach:

1. Funkcje $F(x)=\frac{x^2-5x-6}{x-6}$ i $G(x)=x+1$ są równoważne, bowiem dla każdego $x\neq 6$

$$F(x)=\frac{x^2-5x-6}{x-6}=\frac{(x+1)(x-6)}{x-6}=x+1=G(x).$$

2. Funkcje $F(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ i $G(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$ są równoważne, gdyż dla każdego $x\neq-2$ i $x\neq 1$

$$F(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x-3}{x-1}$$

oraz $G(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}=\frac{x-3}{x-1}$.

3. Funkcje $F(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}$ i $G(x)=\frac{x+1}{x-2}$ są nie tylko równoważne, ale nawet równe, gdyż mają tę samą dziedzinę, którą jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{2\}$, i dla wszystkich $x\neq 2$ przyjmują równe wartości.

Na funkcjach wymiernych można wykonywać działania dodawania i mnożenia o podobnych własnościach do działań na liczbach wymiernych.

Sumą dwóch funkcji wymiernych $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taką funkcję $H(x)$, że dla każdej liczby x, dla której określone są funkcje $F(x)$ i $G(x)$, zachodzi równość:

$$H(x)=F(x)+G(x).$$

Z definicji tej wynika, że dziedziną funkcji $H(x)$ jest część wspólna dziedzin funkcji $F(x)$ i $G(x)$. Ponadto, jeśli:

$$F(x)=\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ i } G(x)=\frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

gdzie $g_1(x)\not\equiv 0$, $g_2(x)\not\equiv 0$ i $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ są wielomianami, to $H(x)$ jest funkcją wymierną, bo:

$$F(x)+G(x)=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot g_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}+\frac{f_2(x)\cdot g_1(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=$$

$$=\frac{f_1(x)\cdot g_2(x)+f_2(x)\cdot g_1(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)},$$

gdzie oczywiście $f_1(x)\cdot g_2(x)+f_2(x)\cdot g_1(x)$ i $g_1(x)\cdot g_2(x)$ są wielomianami oraz $g_1(x)\cdot g_2(x)\not\equiv 0$.

Podobnie określamy odejmowanie funkcji wymiernych, należy jedynie w podanej definicji znak „+” zastąpić znakiem „–”.

Przykład 1. Niech $F(x)=\frac{x+6}{x^2-4}$ i $G(x)=\frac{1}{3x+6}$. Wówczas dla każdego $x\neq-2$ i $x\neq 2$ mamy:

$$F(x)+G(x)=\frac{x+6}{x^2-4}+\frac{1}{3x+6}=\frac{x+6}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{3(x+2)}=$$

$$=\frac{3(x+6)}{3(x+2)(x-2)}+\frac{x-2}{3(x+2)(x-2)}=\frac{3x+18+x-2}{3(x+2)(x-2)}=\frac{4x+16}{3(x+2)(x-2)}.$$

Postąpiliśmy tutaj podobnie jak przy dodawaniu ułamków: rozłożyliśmy mianowniki na czynniki, znaleźliśmy wspólny mianownik, sprowadziliśmy ułamki do wspólnego mianownika (rozszerzyliśmy te ułamki do ułamków o tym samym mianowniku, mnożąc je i dzieląc przez to samo wyrażenie różne od zera), a następnie dodaliśmy je.

Iloczynem dwóch funkcji wymiernych $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taką funkcję $H(x)$, że dla każdej liczby x, dla której określone są funkcje $F(x)$ i $G(x)$, zachodzi równość:

$$H(x)=F(x)\cdot G(x).$$

Jeśli $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ dla $x\in D_1$, zaś $G(x)=\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ dla $x\in D_2$,

to dla każdego $x\in D_1\cap D_2$:

$$F(x)\cdot G(x)=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}.$$

Widzimy więc, że iloczyn funkcji wymiernych też jest funkcją wymierną.

Przykład 2. Niech $F(x)=\dfrac{x}{2x-8}$ i $G(x)=\dfrac{x^2-16}{x^3-x}$.

Ponieważ dziedziną funkcji $F(x)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{4\}$, zaś dziedziną funkcji $G(x)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,0,1\}$, więc ich iloczyn $F(x)\cdot G(x)$ jest określony w zbiorze $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,0,1,4\}$ i wynosi:

$$F(x)\cdot G(x)=\frac{x}{2x-8}\cdot\frac{x^2-16}{x^3-x}=\frac{x}{2(x-4)}\cdot\frac{(x+4)(x-4)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x+4}{2(x+1)(x-1)}.$$

Na funkcjach wymiernych można jeszcze wykonywać dzielenie.

Ilorazem funkcji wymiernych $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taką funkcję $H(x)$, że dla każdej liczby x, dla której są określone funkcje $F(x)$ i $G(x)$ oraz $G(x)\neq 0$, zachodzi równość:

$$H(x)=\frac{F(x)}{G(x)}.$$

Jeżeli $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ dla $x\in D_1$, zaś $G(x)=\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ dla $x\in D_2$ oraz $f_2(x)=0$ dla $x\in A$,

to $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}:\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\dfrac{g_2(x)}{f_2(x)}=\dfrac{f_1(x)\cdot g_2(x)}{g_1(x)\cdot f_2(x)}$

dla każdego $x\in(D_1\cap D_2)\setminus A$.

Wynika stąd, że iloraz funkcji wymiernych jest także funkcją wymierną.

Przykład 3. Niech $F(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$ i $G(x)=\frac{x+1}{2(x^2-4)}$.

Ponieważ dziedziną funkcji $F(x)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{-2\}$, zaś dziedziną funkcji $G(x)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{-2,2\}$ i $G(x)\neq 0$ dla $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{-2,-1,2\}$, więc ich iloraz $\frac{F(x)}{G(x)}$ jest określony w zbiorze $\boldsymbol{R}\ \{-2,-1,2\}$ i wynosi:

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{x^2-1}{x+2}:\frac{x+1}{2(x^2-4)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+2}\cdot\frac{2(x+2)(x-2)}{x+1}=2(x-1)(x-2).$$

I tutaj widać, że przy dzieleniu funkcji wymiernych postępujemy podobnie, jak przy dzieleniu ułamków: rozkładamy liczniki i mianowniki funkcji wymiernych na czynniki, zaś dzieląc $F(x)$ przez $G(x)$ mnożymy $F(x)$ przez odwrotność $G(x)$, po czym otrzymaną funkcję wymierną przedstawiamy w najprostszej postaci, skracając możliwie najbardziej otrzymany ułamek.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja wymierna?
2. Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi?
3. Wyznacz $F(x)+G(x)$, jeśli $F(x)=\frac{x+1}{x-3}$ i $G(x)=\frac{x-1}{x}$.
4. Wyznacz $F(x)-G(x)$, jeśli $F(x)=\frac{x+1}{x-1}$ i $G(x)=\frac{x-1}{x+1}$.
5. Wyznacz $F(x)\cdot G(x)$, jeśli $F(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}$ i $G(x)=\frac{x+3}{x-3}$.
6. Wyznacz $\frac{F(x)}{G(x)}$, jeśli $F(x)=\frac{1-x^4}{1-x^3}$ i $G(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$.
7. Skróć ułamki:

   a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$; b) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$; c) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$; d) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.
8. Dana jest funkcja wymierna $F(x)=\frac{x+2}{x-2}$. Zbadaj, czy następująca funkcja jest funkcją wymierną. Jeśli tak, to znajdź jej dziedzinę.

   a) $F(x+1)$; b) $F(-x+2)$; c) $F(3x)$; d) $F(x^3)$; e) $F\left(\frac{1}{x}\right)$.
9. Niech $F(x)=\frac{1}{x}$, $G(x)=\frac{1}{x-1}$. Wyznacz:

   a) $F(3x)-G(2x)$; b) $3F(x)-F(3x)$; c) $\frac{F(x)}{G(x)}-\frac{G(x)}{F(x)}$;

   d) $G(x+1)-F(x)$; e) $F(x^2)-G(x^2)$.

10*. Wyznacz wszystkie funkcje $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0,1\}\ \rightarrow\ \boldsymbol{R}$ spełniające dla każdego $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0,1\}$ równanie $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$.

2. Przekształcanie wyrażeń wymiernych

Podrozdział ten poświęcimy działaniom łącznym na funkcjach wymiernych.

Przykład 1. Skróć ułamki:

a) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x}$; b) $\frac{3x-2}{4-9x^2}$; c) $\frac{x^3-5x^2+x-5}{x^2-25}$.

Rozwiązanie:

a) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x}=\frac{x\left(x^2+4x+4\right)}{x(x+2)}=\frac{x(x+2)^2}{x(x+2)}=x+2$, gdy $x\neq 0$ i $x\neq -2$;

b) $\frac{3x-2}{4-9x^2}=\frac{3x-2}{-\left(9x^2-4\right)}=\frac{3x-2}{-(3x-2)(3x+2)}=-\frac{1}{3x+2}$, gdy $x\neq -\frac{2}{3}$ i $x\neq \frac{2}{3}$;

c) $\frac{x^3-5x^2+x-5}{x^2-25}=\frac{x^2(x-5)+(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{(x-5)\left(x^2+1\right)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x^2+1}{x+5}$, gdy $x\neq -5$ i $x\neq 5$.

Przykład 2. Wykonaj działania:

a) $\frac{10t-2}{8t-2}+\frac{t-1}{12t-3}$; b) $\frac{2x+1}{x-5}-\frac{2x-10}{x^2-10x+25}$;

c) $\frac{3}{2x+2}-\frac{2}{3x-3}+\frac{5x+3}{6x^2-6}$; d) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}-\frac{64}{x^2-16}$.

Rozwiązanie:

a) $\frac{10t-2}{8t-2}+\frac{t-1}{12t-3}=\frac{2(5t-1)}{2(4t-1)}+\frac{t-1}{3(4t-1)}=\frac{5t-1}{4t-1}+\frac{t-1}{3(4t-1)}=$

$=\frac{3(5t-1)}{3(4t-1)}+\frac{t-1}{3(4t-1)}=\frac{3(5t-1)+t-1}{3(4t-1)}=\frac{16t-4}{3(4t-1)}=\frac{4(4t-1)}{3(4t-1)}=\frac{4}{3}$, gdy $t\neq \frac{1}{4}$;

b) $\frac{2x+1}{x-5}-\frac{2x-10}{x^2-10x+25}=\frac{2x+1}{x-5}-\frac{2(x-5)}{(x-5)^2}=\frac{2x+1}{x-5}-\frac{2}{x-5}=$

$=\frac{2x+1-2}{x-5}=\frac{2x-1}{x-5}$, gdy $x\neq 5$;

c) $\frac{3}{2x+2}-\frac{2}{3x-3}+\frac{5x+3}{6x^2-6}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{5x+3}{6(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{9(x-1)}{6(x+1)(x-1)}-\frac{4(x+1)}{6(x+1)(x-1)}+\frac{5x+3}{6(x+1)(x-1)}=\frac{9(x-1)-4(x+1)+5x+3}{6(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{9x-9-4x-4+5x+3}{6(x+1)(x-1)}=\frac{10x-10}{6(x+1)(x-1)}=\frac{10(x-1)}{6(x+1)(x-1)}=\frac{5}{3(x+1)}$,

gdy $x\neq -1$ i $x\neq 1$;

d) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}-\frac{64}{x^2-16}=\frac{(x+4)^2}{(x-4)(x+4)}-\frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}-\frac{64}{(x-4)(x+4)}=$

$=\frac{(x+4)^2-(x-4)^2-64}{(x-4)(x+4)}=\frac{(x^2+8x+16)-(x^2-8x+16)-64}{(x-4)(x+4)}=$

$=\frac{16x-64}{(x-4)(x+4)}=\frac{16(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{16}{x+4}$, gdy $x\neq -4$ i $x\neq 4$.

Przykład 3. Wykonaj działania:

a) $\frac{x^2-25}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+5x}$;

b) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-4x+4}$;

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$;

d) $\frac{2x^3-2}{3x+3}:\frac{x^2-2x+1}{9x^2-9}$.

Rozwiązanie:

a) $\frac{x^2-25}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+5x}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}=\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}$,

gdy $x\neq -5$, $x\neq 0$ i $x\neq 3$;

b) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+4)}\cdot\frac{x(x+3)}{(x-2)^2}=\frac{x(x-3)}{(x-2)(x+4)}$,

gdy $x\neq -4$, $x\neq -3$ i $x\neq 2$;

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+5)(x-2)}:\frac{(x+3)(x+4)}{(x-2)(x-7)}=$

$=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+5)(x-2)}\cdot\frac{(x-2)(x-7)}{(x+3)(x+4)}=\frac{(x-1)(x-7)}{(x+5)(x+4)}$,

gdy $x\neq -5$, $x\neq -4$, $x\neq -3$, $x\neq 2$ i $x\neq 7$;

d) $\frac{2x^3-2}{3x+3}:\frac{x^2-2x+1}{9x^2-9}=\frac{2(x^3-1)}{3(x+1)}\cdot\frac{9(x^2-1)}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{3(x+1)}\cdot\frac{9(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=6(x^2+x+1)$,

gdy $x\neq -1$ i $x\neq 1$.

Przykład 4. Wykonaj działania:

a) $\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right):\left[-2\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1-x}{x^2}\right)\right]$;

b) $\left(a-\frac{a-b}{1+ab}\right):\left|1+\frac{a(a-b)}{1+ab}\right|$;

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$.

Rozwiązanie:

a) $\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}\right):\left[-2\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=$

$=\left(-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-\frac{4}{(x+1)(x-1)}\right):\left[-2\left(\frac{1}{x^2(x+1)}+\frac{x-1}{x^2}\right)\right]=$

$=\left(\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}+\frac{4}{(x+1)(x-1)}\right):\left[2\cdot\left(\frac{1}{x^2(x+1)}+\frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)}\right)\right]=$

$=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2+4}{(x+1)(x-1)}:\frac{2(1+x^2-1)}{x^2(x+1)}=$

$=\frac{4x+4}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x^2(x+1)}{2x^2}=\frac{4(x+1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{2}=$

$=\frac{2}{x-1}\cdot(x+1)=\frac{2(x+1)}{x-1},$

gdy $x\neq-1,\ x\neq 0$ i $x\neq 1$;

b) $\left(a-\frac{a-b}{1+ab}\right):\left(1+\frac{a(a-b)}{1+ab}\right)=$

$=\left(\frac{a(1+ab)}{1+ab}-\frac{a-b}{1+ab}\right):\left(\frac{1+ab}{1+ab}+\frac{a(a-b)}{1+ab}\right)=$

$=\frac{a+a^2b-a+b}{1+ab}:\frac{1+ab+a^2-ab}{1+ab}=\frac{a^2b+b}{1+ab}:\frac{1+a^2}{1+ab}=$

$=\frac{a^2b+b}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+a^2}=\frac{b(a^2+1)}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+a^2}=b,$ gdy $ab\neq-1$;

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=$

$=\frac{a^2+b^2-ab}{b}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}:\frac{a-b}{ab}=$

$=\frac{a^2-ab+b^2}{b}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\cdot\frac{ab}{a-b}=a,$

gdy $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq -b,\ a\neq b.$

Pytania i zadania

1. Wykonaj działania:

a) $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}$; b) $\frac{x^2-1}{(x-1)x+1}+\frac{1-2x}{x(1-x)+1}$; c) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

2. Wykonaj działania:

a) $\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a+b}{a-b}+1$; b) $\frac{a-1}{a^2-6a+9}+\frac{a-2}{a^2-4a+3}$;

c) $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^3-8}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}$; d) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

3. Wykonaj działania:

a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab^3}\right):\left(b-1+\frac{1}{b}\right)$; b) $\frac{3ab+a^2}{ab-a^2}+\frac{3ab+b^2}{ab-b^2}$.

4*. Uprość wyrażenia:

a) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$;

b) $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}$;

c) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-a}{bc}$.

3. Równania wymierne

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami oraz $g(x)\not\equiv 0$, to równanie postaci:

$$(*)\ \frac{f(x)}{g(x)}=0$$

nazywamy **równaniem wymiernym** z jedną niewiadomą x.

Mamy więc do czynienia z równaniem, którego lewa strona jest pewną funkcją wymierną. Znajdowanie rozwiązań równań wymiernych oznacza znajdowanie miejsc zerowych funkcji wymiernych. Z określenia funkcji wymiernej wynika, że zbiorem rozwiązań równania $(*)$ jest zbiór tych pierwiastków wielomianu $f(x)$, które nie są pierwiastkami wielomianu $g(x)$.

Rozwiązywanie równań wymiernych zilustrujemy na kilku przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$$\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}.$$

Rozwiązanie:

Równanie to ma sens, gdy $(x-2)(x+2)\neq 0$, czyli gdy $x\neq -2$ i $x\neq 2$. Wtedy jest ono równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}-\frac{20}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{4(x+2)-5(x-2)-20}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{4x+8-5x+10-20}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{-x-2}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$-\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$-\frac{1}{x-2}=0,$$

ostatniego zaś równania nie spełnia żadna liczba rzeczywista.
Odpowiedź: Dane równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 2. Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-2}{x^2+x}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ $x^2+x=(x+1)x=0 \iff x=-1$ lub $x=0$, więc dane równanie ma sens, gdy $x\neq -1$ i $x\neq 0$. W zbiorze $\boldsymbol{R}\setminus\{-1,0\}$ jest ono równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{x^2-2}{x(x+1)}=0,$$

$$\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}-\frac{x^2-2}{x(x+1)}=0,$$

$$\frac{x+1+x-(x^2-2)}{x(x+1)}=0,$$

$$\frac{-x^2+2x+3}{x(x+1)}=0,$$

$$-x^2+2x+3=0,$$

$$-(x+1)(x-3)=0,$$

$$x-3=0,$$

$$x=3.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest $x=3$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie:

$$\frac{20+x}{2x-2}-\frac{9x^2+x+2}{6x^2-6}=\frac{5-3x}{x+1}-\frac{10-4x}{3x+3}.$$

Rozwiązanie:

Równanie to jest dla $x\neq -1$ i $x\neq 1$ równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{20+x}{2(x-1)}-\frac{9x^2+x+2}{6(x^2-1)}-\frac{5-3x}{x+1}+\frac{10-4x}{3(x+1)}=0,$$

$$\frac{3(20+x)(x+1)}{6(x-1)(x+1)}-\frac{9x^2+x+2}{6(x-1)(x+1)}-\frac{6(5-3x)(x-1)}{6(x-1)(x+1)}+\frac{2(10-4x)(x-1)}{6(x-1)(x+1)}=0,$$

$$\frac{3(20+x)(x+1)-\left(9x^2+x+2\right)-6(5-3x)(x-1)+2(10-4x)(x-1)}{6(x-1)(x+1)}=0,$$

$$\frac{3\left(x^2+21x+20\right)-9x^2-x-2-6\left(-3x^2+8x-5\right)+2\left(-4x^2+14x-10\right)}{6(x-1)(x+1)}=0,$$

$$\frac{4x^2+42x+68}{6(x-1)(x+1)}=0,$$

$$2x^2+21x+34=0.$$

Po rozwiązaniu ostatniego równania otrzymujemy:

$$2x^2+21x+34=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-\frac{17}{2} \text{ lub } x=-2.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby: $x_1=-\frac{17}{2}$, $x_2=-2$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}.$$

Rozwiązanie:

Najpierw rozkładamy na czynniki wielomiany występujące w mianownikach ułamków. Mamy:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)\left(x^2+1\right),$$

$$x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right),$$

$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Następnie dane równanie przepisujemy równoważnie, otrzymując kolejno równania:

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}-\frac{4x^2+21}{(x+1)\left(x^2+1\right)},$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}-\frac{4(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\frac{x^2+10x}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}-\frac{\left(4x^2+21\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=0,$$

$$\frac{x+1-4(x-1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+10x\right)+\left(4x^2+21\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=0,$$

$$\frac{x+1-4x^3-4x+4x^2+4-x^2-10x+4x^3-4x^2+21x-21}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=0,$$

$$\frac{-x^2+8x-16}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=0,$$

$$-\frac{(x-4)^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=0.$$

Ostatnie równanie jest dla $x \neq -1$ i $x \neq 1$ równoważne równaniu $(x-4)^2=0$, czyli równaniu $x-4=0$, skąd $x=4$.
Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest $x=4$.

Jest wiele zadań tekstowych, które prowadzą do równań wymiernych. Oto przykłady takich zadań:

Przykład 5. Łódź motorowa przebyła w ciągu 8 h 20 min drogę 80 km z prądem rzeki i taką samą drogę pod prąd. Prędkość własna łodzi wynosi 20 km/h. Jaka jest prędkość prądu rzeki?
Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy nieznaną prędkość prądu rzeki, to czas jazdy z prądem wyniesie $\frac{80}{20+x}$ h, zaś pod prąd $\frac{80}{20-x}$ h. Ponieważ cały rejs trwał $8\frac{1}{3}$ h, więc otrzymujemy równanie $\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=\frac{25}{3}$, którego rozwiązaniem jest $x=4$ (pierwiastek ujemny odrzucamy).

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki wynosi 4 km/h.

Przykład 6. Trzech robotników wykonywało pewną pracę: pierwszy o 7 dni dłużej, drugi o 15 dni dłużej, a trzeci 3 razy dłużej, niż gdyby pracowali razem. W jakim czasie wykonaliby tę pracę razem?
Rozwiązanie:

Załóżmy, że robotnicy ci, pracując razem, wykonaliby tę pracę w ciągu x dni, wobec tego każdy z nich, pracując z osobna, uporałby się z nią w ciągu odpowiednio: $x+7$, $x+15$ i $3x$ dni. Zatem w ciągu 1 dnia wykonaliby, pracując razem, $\frac{1}{x}$ tej pracy, każdy zaś z nich z osobna – odpowiednio: $\frac{1}{x+7}$, $\frac{1}{x+15}$ i $\frac{1}{3x}$ tej pracy. Stąd wynika równanie: $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+15}+\frac{1}{3x}$, którego rozwiązaniem (dodatnim) jest liczba $x=5$.
Odpowiedź: Robotnicy, pracując razem, wykonaliby pracę w ciągu 5 dni.

Przykład 7. Samochód przebył w pewnym czasie drogę 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o 0,5 godziny. Z jaką prędkością jechał ten samochód?
Rozwiązanie:

Oznaczmy nieznaną średnią prędkość, z którą poruszał się ten samochód, przez v. Czas, w którym samochód przebył z tą prędkością drogę 210 km, to oczywiście $\frac{210}{v}$, czas zaś, w którym drogę tę przebył z prędkością $v+10$, to $\frac{210}{v+10}$; przy czym, jak wiemy, czas ten skrócił się o 0,5 godziny. Stąd równanie:

$\frac{210}{v}-\frac{210}{v+10}=\frac{1}{2}$, którego dodatnim rozwiązaniem jest $v=60$.

Odpowiedź: Samochód poruszał się z prędkością 60 km/h.

Pytania i zadania

1. Co to jest równanie wymierne?
2. Na czym polega rozwiązywanie równania wymiernego?
3. Rozwiąż równania:

   a) $\frac{4}{x+3} = 1$; b) $\frac{7}{x-5} = \frac{3}{x-3}$; c) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{2x+11}{2x+9} = \frac{15}{(x-3)(2x+9)}$.
4. Rozwiąż równania:

   a) $\frac{9x^2-5x}{3x-2} = 2 + \frac{x}{3x-2}$; b) $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{2-x} = \frac{x^2}{x^2-4}$;

   c) $\frac{7}{x-2} + \frac{3}{x-10} = \frac{2x+10}{x^2-12x+20}$; d) $\frac{5x^2-32x+3}{x^2-4x+3} = 2 - \frac{9-3x}{x-1}$.
5. Rozwiąż równania:

   a) $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$; b) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$;

   c) $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1$; d) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$.
6. Dwaj robotnicy, z których drugi rozpoczął pracę o półtora dnia później niż pierwszy, wykonali pewną pracę w ciągu 7 dni, licząc od chwili rozpoczęcia pracy przez pierwszego robotnika. Drugi robotnik, pracując sam, może wykonać tę pracę w czasie o 3 dni krótszym niż pierwszy. W jakim czasie może wykonać tę pracę każdy z nich?
7. Pociąg zatrzymany na 16 min nadrobił potem spóźnienie na trasie liczącej 80 km, jadąc z prędkością o 10 km/h większą niż przewidziana w rozkładzie jazdy. Jaka była prędkość pociągu według rozkładu jazdy?

4. Równania wymierne z parametrem

Omówimy teraz na przykładach rozwiązywanie równań wymiernych z parametrem.

Przykład 1. Rozwiąż równanie z niewiadomą x:

$$\frac{x-2a}{x+3a} = 3 - \frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}.$$

Przeprowadź dyskusję istnienia rozwiązań i ich liczby w zależności od wartości parametru.
Rozwiązanie:

Równanie to ma sens, gdy $x \neq -3a$ i $x \neq 3a$. Wtedy jest ono równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{(x-2a)(x-3a)}{(x+3a)(x-3a)} = \frac{3(x+3a)(x-3a)}{(x+3a)(x-3a)} - \frac{2x^2-13a^2}{(x+3a)(x-3a)},$$

$$(x-2a)(x-3a) = 3(x+3a)(x-3a) - (2x^2-13a^2),$$

$$x^2-5ax+6a^2 = 3x^2-27a^2-2x^2+13a^2,$$

$$-5ax = -20a^2.$$

Jeśli $a \neq 0$, to $-5ax = -20a^2 \iff x = 4a$ i oczywiście wtedy $x \neq -3a$ i $x \neq 3a$. Gdy zaś $a = 0$, to $-5ax = -20a^2 \iff 0 \cdot x = 0$. Zatem dane równanie:

1) ma jedno rozwiązanie $x = 4a$, gdy $a \neq 0$;
2) jest tożsamościowe w zbiorze $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, gdy $a = 0$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie z niewiadomą x:

$$(*)\ \frac{x-b}{x-2a} - \frac{x+2a}{x+b} = \frac{(2a+b)x}{(x-2a)(x+b)}$$

i przeprowadź dyskusję istnienia rozwiązań i ich liczby w zależności od a i b.
Rozwiązanie:

Równanie to ma sens dla $x \neq 2a$ i $x \neq -b$ i wtedy jest równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{(x-b)(x+b)}{(x-2a)(x+b)} - \frac{(x+2a)(x-2a)}{(x-2a)(x+b)} = \frac{(2a+b)x}{(x-2a)(x+b)},$$

$$(x-b)(x+b) - (x+2a)(x-2a) = (2a+b)x,$$

$$x^2 - b^2 - (x^2 - 4a^2) = (2a+b)x,$$

$$(2a+b)x = 4a^2 - b^2,$$

$$(**)\ (2a+b)x = (2a+b)(2a-b).$$

Teraz widzimy, że:

1. Gdy $2a + b \neq 0$ i $2a - b \neq 2a$ i $2a - b \neq -b$, to równanie $(**)$, a zatem także równoważne mu równanie $(*)$, ma jedno rozwiązanie $x = 2a - b$.
2. Gdy $2a + b \neq 0$ i $(2a - b = 2a$ lub $2a - b = -b)$, to równanie $(**)$, a więc również równanie $(*)$, nie ma rozwiązań.
3. Gdy $2a + b = 0$, to równanie $(**)$ jest tożsamościowe i równoważne mu równanie $(*)$ spełnia każda liczba rzeczywista $x \neq 2a$.

W ten sposób dane równanie:

1) ma jedno rozwiązanie $x = 2a - b$, gdy $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $b \neq -2a$;
2) ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $b = -2a$;
3) nie ma rozwiązań, gdy $b \neq -2a$ i $(a = 0$ lub $b = 0)$.

Przykład 3. Z dwóch miejscowości A i B wyszli jednocześnie dwaj turyści idący ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogą z A do B i zaraz wrócił do A, drugi zaś poszedł z B do A i wrócił do B. Turyści minęli się pierwszy raz w odległości a km od A, zaś drugi raz w odległości b od B, przy czym drugi raz minęli się, gdy pierwszy turysta wracał z B, a drugi z A. Jaka jest odległość z A do B?
Rozwiązanie:

Oznaczmy prędkości turystów wychodzących z A i z B odpowiednio przez v_A i v_B, zaś odległość z A do B – przez s. Czas marszu do chwili spotkania jest dla obu turystów jednakowy. Stąd otrzymujemy równania:

$\frac{a}{v_A} = \frac{s-a}{v_B}$ i $\frac{s+b}{v_A} = \frac{2s-b}{v_B}$, czyli równania $\frac{a}{s-a} = \frac{v_A}{v_B}$ i $\frac{s+b}{2s-b} = \frac{v_A}{v_B}$,

a z nich wynika równanie $\frac{a}{s-a} = \frac{s+b}{2s-b}$.

Wyznaczając z niego s, otrzymujemy $s = 3a - b$, gdzie $3a > b$.

Pytania i zadania

1. Rozwiąż równania z niewiadomą x i przeprowadź dyskusję istnienia rozwiązań i ich liczby w zależności od parametrów:

a) $\frac{x}{x-a} = \frac{x+1}{x-a}$; b) $\frac{x+a}{x-2b} = \frac{x-a}{x+b}$;

c) $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x+a} = \frac{a^2}{x^2-a^2}$; d) $\frac{x-2a}{x+3a} = 3 - \frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$;

e) $\frac{x-2a}{x+2a} - \frac{x+2a}{x-2a} = \frac{4a^2}{4a^2-x^2}$; f) $\frac{(1+b)x}{1-b} - \frac{(1-b)(1-x)}{1+b} = \frac{(1-b)(2x+1)}{1+b}$;

g) $\frac{5x-5m}{x^2-4m^2} - \frac{2x-3m}{x^2-2mx} = \frac{3x-2m}{x^2+2mx}$.

2. Dla jakich a i b równanie $\frac{x^2+5}{x^3-3x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x+1)^2}$ jest tożsamościowe w zbiorze $R\setminus\{-1,2\}$?

3. Od dwóch kawałków stopu o różnej zawartości procentowej miedzi ważących a i b kilogramów odcięto kawałki tej samej wagi i każdy z nich stopiono z resztą drugiego stopu. Ile ważył każdy z odciętych kawałków, jeśli wiadomo, że otrzymane stopy miały jednakową procentowo zawartość miedzi?

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x(1+x^2)}{|x|} = m$ nie ma pierwiastków rzeczywistych?

5. Rozwiązanie równania z niewiadomą x $\frac{x-m}{4-6x} - \frac{2x+m}{2x+1} = \frac{2-m-7x^2}{6x^2-x-2}$ jest o 2 większe od wartości parametru m. Znajdź to rozwiązanie.

6. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4m = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?

5. Nierówności wymierne

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami i $g(x) \not\equiv 0$, to każdą z nierówności:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

nazywamy **nierównością wymierną** z jedną niewiadomą x.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych sprowadza się do rozwiązywania nierówności wielomianowych, ponieważ:

1. $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{(<)}{>} 0 \iff f(x)\cdot g(x) \underset{(<)}{>} 0$;

2. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0 \iff f(x)\cdot g(x) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0 \text{ i } g(x) \neq 0.$

Prześledźmy to na kilku przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż nierówność $\dfrac{4-5x}{x+2} < 0.$
Rozwiązanie:

Mamy:

$$\frac{4-5x}{x+2} < 0 \iff (x+2)(4-5x) < 0 \iff$$

$$\iff -5(x+2)\left(x-\frac{4}{5}\right) < 0 \iff x < -2 \text{ lub } x > \frac{4}{5}.$$

Odpowiedź: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right).$

Przykład 2. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x\sqrt{5}-3}{x\sqrt{5}-2} \leqslant 0.$$

Rozwiązanie:

Mamy: $\dfrac{2x\sqrt{5}-3}{x\sqrt{5}-2} \leqslant 0 \iff \dfrac{2\sqrt{5}\left(x-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)}{\sqrt{5}\left(x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \leqslant 0 \iff$

$$\iff \left(x-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \leqslant 0 \text{ i } x \neq \frac{2\sqrt{5}}{5} \iff \frac{3\sqrt{5}}{10} \leqslant x < \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{3\sqrt{5}}{10}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $\dfrac{2a-1}{2a-3} + 1 < 0.$
Rozwiązanie:

Ponieważ $\dfrac{2a-1}{2a-3} + 1 = \dfrac{2a-1}{2a-3} + \dfrac{2a-3}{2a-3} =$

$= \dfrac{4a-4}{2a-3} = 2 \cdot \dfrac{a-1}{a-\frac{3}{2}}$ dla $a \neq \frac{3}{2}$, więc:

$$\frac{2a-1}{2a-3} + 1 < 0 \iff \frac{a-1}{a-\frac{3}{2}} < 0 \iff (a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right) < 0 \iff$$

$$\iff 1 < a < \frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right).$

Przykład 4. Rozwiąż nierówność $\frac{x-1}{4x+5} < \frac{x-3}{4x-3}$.
Rozwiązanie:

Mamy:

$$\frac{x-1}{4x+5} < \frac{x-3}{4x-3} \iff \frac{x-1}{4x+5} - \frac{x-3}{4x-3} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-1)(4x-3)-(x-3)(4x+5)}{(4x+5)(4x-3)} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(4x^2-7x+3)-(4x^2-7x-15)}{16\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{18}{16\left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)} < 0 \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) < 0 \iff$$

$$\iff -\frac{5}{4} < x < \frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Przykład 5. Rozwiąż nierówność $\frac{x^2-9}{x^2+3x} > 0$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{x^2-9}{x^2+3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)x} = \frac{x-3}{x}$ dla $x \neq -3$, więc:

$$\frac{x^2-9}{x^2+3x} > 0 \iff \frac{x-3}{x} > 0 \text{ i } x \neq -3 \iff x(x-3) > 0 \ \wedge \ x \neq -3 \iff$$

$$\iff (x < 0 \text{ lub } x > 3) \text{ i } x \neq -3.$$

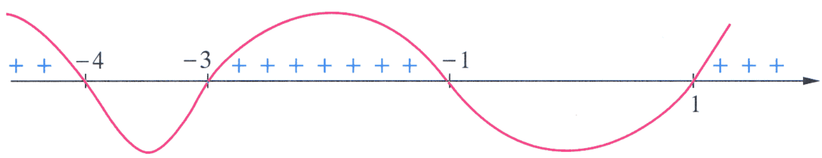
Odpowiedź: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; +\infty)$.

Przykład 6. Rozwiąż nierówność $\frac{x^2+7x+12}{x^2-1} > 0$.
Rozwiązanie:

Mamy: $\frac{x^2+7x+12}{x^2-1} > 0 \iff \frac{(x+4)(x+3)}{(x+1)(x-1)} > 0 \iff$

$$\iff (x+4)(x+3)(x+1)(x-1) > 0 \iff$$

$$\iff x < -4 \text{ lub } -3 < x < -1, \text{ lub } x > 1 \text{ (ryc. 3.1)}.$$



Ryc. 3.1.

Odpowiedź: $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; -1) \cup (1; +\infty)$.

Przykład 7*. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{4\left(5x-x^2\right)}{16x^4-1}+\frac{4}{2x-1}<\frac{16x^2+21}{8x^3-4x^2+2x-1}+\frac{1}{8x^3+4x^2+2x+1}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ: $16x^4-1=\left(4x^2-1\right)\left(4x^2+1\right)=(2x-1)(2x+1)\left(4x^2+1\right)$,

$8x^3-4x^2+2x-1=4x^2(2x-1)+2x-1=(2x-1)\left(4x^2+1\right)$,

$8x^3+4x^2+2x+1=4x^2(2x+1)+2x+1=(2x+1)\left(4x^2+1\right)$,

dlatego dana nierówność jest dla $x\neq-\frac{1}{2}$ i $x\neq\frac{1}{2}$ równoważna nierówności:

$$\frac{4\left(5x-x^2\right)}{16x^4-1}+\frac{4(2x+1)\left(4x^2+1\right)}{16x^4-1}<\frac{\left(16x^2+21\right)(2x+1)}{16x^4-1}+\frac{2x-1}{16x^4-1},$$

a ta kolejno nierównościom:

$$\frac{4\left(5x-x^2\right)+4(2x+1)\left(4x^2+1\right)}{(2x+1)(2x-1)\left(4x^2+1\right)}<\frac{\left(16x^2+21\right)(2x+1)+2x-1}{(2x+1)(2x-1)\left(4x^2+1\right)},\qquad /\cdot\left(4x^2+1\right)$$

$$\frac{20x-4x^2+4\left(8x^3+4x^2+2x+1\right)}{(2x+1)(2x-1)}<\frac{32x^3+16x^2+42x+21+2x-1}{(2x+1)(2x-1)},$$

$$\frac{20x-4x^2+32x^3+16x^2+8x+4}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}<\frac{32x^3+16x^2+44x+20}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{32x^3+12x^2+28x+4}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}<\frac{32x^3+16x^2+44x+20}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{8x^3+3x^2+7x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}<\frac{8x^3+4x^2+11x+5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{x^2+4x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}>0,$$

$$\frac{(x+2)^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}>0,$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0 \text{ i } x\neq-2.$$

Widzimy więc, że dana nierówność zachodzi, gdy $\left(x<-\frac{1}{2}\right.$ lub $\left.x>\frac{1}{2}\right)$ i $x \neq -2$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór:

$$(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Pytania i zadania

1. Co to jest nierówność wymierna?
2. Omów, na czym polega rozwiązywanie nierówności wymiernej.
3. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{2}{2x-1} > \frac{3}{3x-4}$; b) $\frac{4-x}{3x-1} < \frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{12x-1} < \frac{3}{4x+3}$;

d) $\frac{x-1}{x^2+1} < 0$; e) $\frac{x^2+4}{x} > 0$; f) $\frac{x^2+8x+16}{2x^2+1} \geqslant 0$.

4. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{x^2+5x}{x+5} > 0$; b) $\frac{3x+1}{x^2-3x+2} < 0$; c) $\frac{3x^3-x^2-3x+1}{1-3x} \leqslant 0$;

d) $\frac{x^2-5}{x} < x+1$; e) $\frac{x^2+7x}{x-2} \geqslant x$; f) $\frac{x}{x^2-5x+6} < \frac{1}{x-2}$.

5*. Rozwiąż nierówności:

a) $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| \geqslant 2$; b) $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1$; c) $\frac{1+x^3}{x^2-4} < x$;

d) $\left|\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right| < 1$; e) $\frac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$.

6*. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności:

a) $\frac{x^2}{4+9x^4} \leqslant \frac{1}{12}$; b) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$; c) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2$.

7. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{14x}{x+1} - \frac{9x-30}{x-4} < 0$; b) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;

c) $\frac{5x+4}{x+3} - \frac{2+x}{1-x} \leqslant 0$; d) $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 > 0$.

8. Udowodnij, że jeżeli $x > 1$, to:

a) $(2x^4+x)\left(x^3+2-\frac{1}{x}\right) < \left(2x^4+2x+2-\frac{1}{x}\right)(x^3+x)$;

b) $\left(2x^3+2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+2-\frac{1}{x}\right) < \left(2x^3+2-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+2-\frac{1}{x^2}\right)$;

c) $\left(x^4+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right) < \left(x^4+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)$;

6. Funkcja homograficzna

Funkcję wymierną postaci:

$$(*)\ h(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\ \text{gdy}\ ad-bc\neq 0\ \text{i}\ c\neq 0$$

nazywamy **funkcją homograficzną**.

Z definicji tej wynika, że zbiorem określoności funkcji homograficznej jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od $-\frac{d}{c}$, bowiem $cx+d\neq 0$ dla $x\neq -\frac{d}{c}$. Po podzieleniu dwumianu $ax+b$ przez dwumian $cx+d$ możemy wzór funkcji $h(x)$ zapisać równoważnie:

$$h(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}.$$

Widzimy teraz, że funkcja $h(x)$ przyjmuje wartości różne od $\frac{a}{c}$, ponieważ wyrażenie $\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$, przy założeniu, że $ad-bc\neq 0$ i $c\neq 0$, przyjmuje dla $x\neq -\frac{d}{c}$ wartości różne od zera. Możemy więc powiedzieć, że dziedziną funkcji homograficznej postaci $(*)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, a zbiorem wartości $\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$. Rozpatrzmy następujące przykłady:

Funkcja $h(x)=\frac{1}{x}$ jest homograficzna
(tutaj $a=d=0, b=c=1$ i oczywiście $ad-bc=-1\neq 0$).

Funkcja $h(x)=\frac{x-1}{x+1}$ jest homograficzna
($a=c=d=1,\ b=-1$ i oczywiście $ad-bc=1-(-1)=2\neq 0$).

Funkcja $f(x)=\frac{3x+2}{6x+4}$ nie jest homograficzna

(gdyż $ad-bc=3\cdot 4-2\cdot 6=0$).

Zajmijmy się szczególnym przypadkiem funkcji homograficznej, a mianowicie funkcją postaci:

$h(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a\neq 0$.

Jest ona określona w zbiorze $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, a zbiorem wartości tej funkcji jest także zbiór $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Zauważmy też, że gdy $a>0$, to wartości tej funkcji są tego samego znaku, co argumenty, w których je przyjmuje. Geometrycznie oznacza to, że wykres tej funkcji leży wtedy w I i III ćwiartce układu współrzędnych. Gdy natomiast $a<0$, wtedy wartości tej funkcji są przeciwnego znaku co argumenty, w których je przyjmuje, więc jej wykres leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Ponieważ $\left|h(x)\right| = \frac{|a|}{|x|}$ i $|x| = \frac{|a|}{\left|h(x)\right|}$, więc jeśli wartości bezwzględne argumentu nieograniczenie rosną, to wartości funkcji $h(x) = \frac{a}{x}$ maleją do zera i na odwrót, jeśli wartości bezwzględne argumentów maleją do zera, to wartości funkcji:
- nieograniczenie rosną, gdy wartości dodatnie argumentów dążą do zera,
- nieograniczenie maleją, gdy wartości ujemne argumentów dążą do zera.

Zapisujemy to następująco:

$h(x) \to 0$, gdy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$, czyli gdy $|x| \to +\infty$,

oraz $h(x) \to +\infty$, gdy $x \to 0^+$, zaś $h(x) \to -\infty$, gdy $x \to 0^-$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Funkcja $h(x) = \frac{a}{x}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$, gdy $a > 0$, zaś rosnąca, gdy $a < 0$.

□ Dowód. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami różnymi od zera.

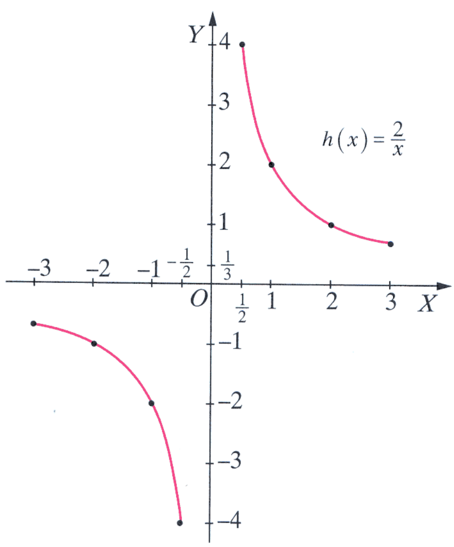
Jeśli $a > 0$, to $h(x_1) - h(x_2) = \frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0$, gdy $x_1 < x_2 < 0$ lub $0 < x_1 < x_2$.

Zatem gdy $a > 0$, to $h(x_1) > h(x_2)$ dla dowolnych x_1 i x_2 takich, że $x_1 < x_2 < 0$ lub $0 < x_1 < x_2$, co dowodzi, że funkcja $h(x)$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$.

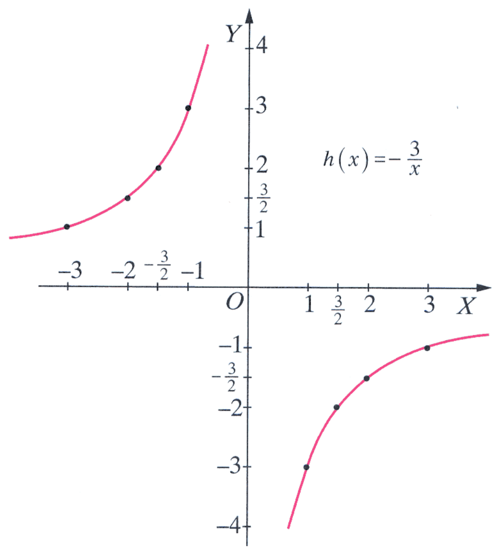
Analogicznie dowodzimy, że jest ona rosnąca w tych przedziałach, gdy $a < 0$. □

Wykres funkcji $h(x) = \frac{a}{x}$, gdy $a \neq 0$, nazywamy **hiperbolą**.

Poniżej możemy się przyjrzeć wykresom funkcji $h(x) = \frac{2}{x}$ i $h(x) = -\frac{3}{x}$.



Ryc. 3.2.



Ryc. 3.3.

Spójrzmy na funkcję $h(x)=\frac{a}{x}$ jeszcze inaczej. Ze wzoru $h(x)=\frac{a}{x}$ otrzymujemy związek $x \cdot h(x)=a$, który oznacza, że iloczyn dowolnego argumentu x i odpowiadającej mu wartości $h(x)$ jest wielkością stałą równą a. Jeśli zapiszemy związek $x \cdot h(x)=a$ w postaci:

$$\frac{h(x)}{\frac{1}{x}}=a,$$

to możemy stwierdzić, że wartości funkcji $h(x)=\frac{a}{x}$ są proporcjonalne do odwrotności argumentów, którym są one przyporządkowane, gdyż iloraz $\frac{h(x)}{\frac{1}{x}}$ jest wielkością stałą. Inaczej mówiąc, wartości funkcji $h(x)=\frac{a}{x}$ są odwrotnie proporcjonalne do odpowiadających im argumentów. Dlatego funkcję homograficzną $h(x)=\frac{a}{x}$ nazywa się często także **proporcjonalnością odwrotną**.

Oto przykłady niektórych zastosowań tej funkcji:
- długość prostokąta o danym polu jest odwrotnie proporcjonalna do jego szerokości;
- liczba kilometrów przebytej przez samochód trasy jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do liczby litrów paliwa, jakie pozostało w baku samochodu;
- liczba pomarańczy kupionych za 20 zł jest odwrotnie proporcjonalna do ceny za jeden owoc;
- w ruchu jednostajnym prostoliniowym prędkość ciała poruszającego się po danej drodze jest odwrotnie proporcjonalna do czasu potrzebnego na jej przebycie;
- liczba równych odcinków, na które dzielimy odcinek o danej długości, jest odwrotnie proporcjonalna do ich długości.

Zajmiemy się teraz wykresem funkcji homograficznej w ogólnym przypadku. Przypomnijmy sobie, w jaki sposób z wykresu dowolnej funkcji $y=f(x)$ otrzymuje się wykresy funkcji (zob. podręcznik dla klasy I): $y=f(x-p)$, $y=f(x)+q$, $y=f(x-p)+q$. Potrafimy zatem sporządzić wykresy funkcji:

$$h(x)=\frac{a}{x-p}, \quad h(x)=\frac{a}{x}+q, \quad h(x)=\frac{a}{x-p}+q.$$

Twierdzenie

Wykres funkcji homograficznej $h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad-bc \neq 0$ i $c \neq 0$,

powstaje z wykresu funkcji $g(x)=\dfrac{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x}$ w przesunięciu równoległym, w którym punkt $(0;0)$ przechodzi na punkt $\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.

☐ Dowód. Wystarczy przekształcić wzór funkcji $h(x)$, dzieląc $ax+b$ przez $cx+d$. Otrzymujemy wówczas:

$$h(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d},\text{ zaś dalej:}$$

$$h(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x+\frac{d}{c}},$$

$$h(x)=\frac{\frac{a}{c}\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}.$$

Teraz widać, że:

$$h(x)=g(x-p)+q,$$

gdzie $g(x)=\dfrac{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x}$, $p=-\dfrac{d}{c}$, $q=\dfrac{a}{c}$. ☐

Z twierdzenia tego wynika zatem, że wykres funkcji $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad-bc\neq 0$ i $c\neq 0$, jest także hiperbolą.

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji:

$$h(x)=\frac{x-1}{x+1}.$$

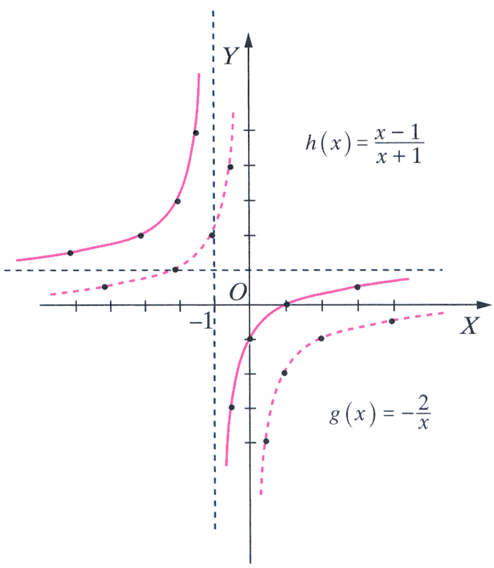
Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x takiej, że $x\neq -1$:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=$$

$$1+\frac{-2}{x+1}=\frac{-2}{x-(-1)}+1,$$

dlatego wykres tej funkcji otrzymamy, przesuwając wykres funkcji $g(x)=\dfrac{-2}{x}$ wzdłuż osi OX o -1, zaś wzdłuż osi OY o 1 (ryc. 3.4).



Ryc. 3.4.

Przykład 2. Sporządź wykres funkcji:

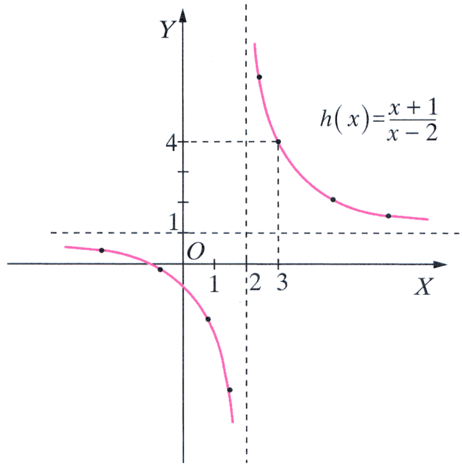
$$h(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1, \text{ więc:}$$

$$h(x) = \frac{3}{x-2} + 1.$$

Zatem wykres funkcji $h(x)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $g(x) = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi OX o 2, zaś wzdłuż osi OY o 1 (ryc. 3.5).



Ryc. 3.5.

Przykład 3. Sporządź wykres funkcji:

$$h(x) = \frac{-3x+1}{x-1}.$$

Rozwiązanie:

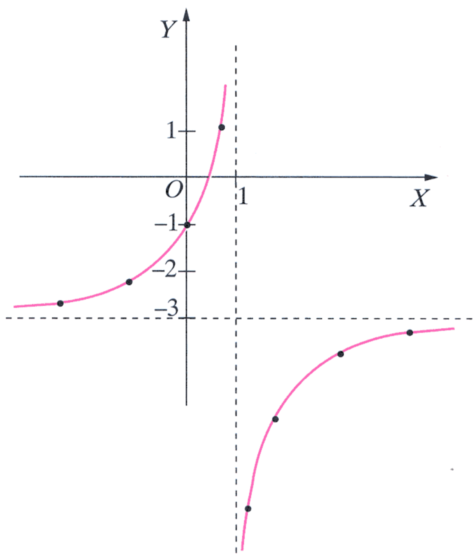
Przekształcamy najpierw wyrażenie wymierne $\frac{-3x+1}{x-1}$ określające funkcję $h(x)$. Mamy:

$$\frac{-3x+1}{x-1} = \frac{-3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} - 3.$$

Zatem funkcja $h(x)$ określona jest też wzorem:

$$h(x) = \frac{-2}{x-1} - 3,$$

a jej wykres otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $g(x) = \frac{-2}{x}$ wzdłuż osi OX o 1, wzdłuż osi OY o -3 (ryc. 3.6).

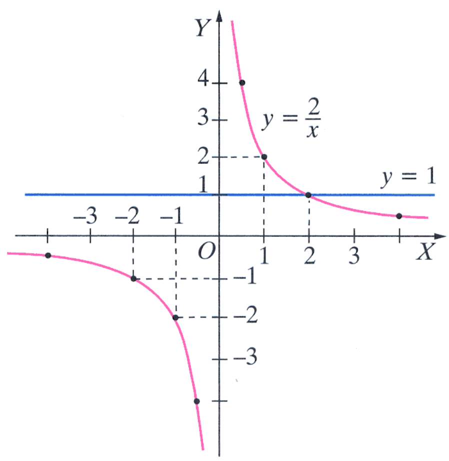


Ryc. 3.6.

Przykład 4. Rozwiąż graficznie nierówność $\frac{2}{x} > 1$.
Rozwiązanie:

Sporządzamy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \frac{2}{x}$ i $y = 1$ (ryc. 3.7).

Ponieważ wartości funkcji $y = \frac{2}{x}$ są w przedziale $(-\infty; 0)$ ujemne, więc w tym przedziale żadna liczba nie spełnia podanej nierówności, zaś w przedziale $(0; +\infty)$ funkcja ta ma wartości większe od 1 dla $x < 2$. Dlatego zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(0; 2)$.



Ryc. 3.7.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja homograficzna?
2. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji homograficznej.
3. Co nazywamy proporcjonalnością odwrotną? Podaj jej przykłady.
4. Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{-2x}{x-2}$; c) $f(x)=\frac{-x+2}{x+2}$;

d) $f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$; e) $f(x)=\frac{-0,5x+1,5}{x-0,5}$; f) $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

5*. Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$; c) $f(x)=\frac{|x+2|}{x-2}$;

d) $f(x)=\frac{-2}{|x|-1}$; e) $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; f) $f(x)=\frac{|x+1|-x}{|x-2|+3}$.

6. Z podanych równań wyznacz y jako funkcję x i sporządź jej wykres:

a) $xy+x-y-3=0$; b) $xy+2x-y-2=0$; c) $xy+y-x+1=0$.

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; b) $f(x)=2+\frac{1}{x-2}$; c) $f(x)=-1+\frac{2}{x-1}$.

8. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $\frac{2}{x}=1$; b) $\frac{1}{2x}=-1$; c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

d) $\frac{2}{x}<1$; e) $\frac{1}{2x}\leqslant 4$; f) $\frac{-2}{x}>-1$.

9. Rozwiąż graficznie i rachunkowo układ równań:

a) $\begin{cases} y-x=0 \\ y-2=\frac{6}{x-3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+y+8)(x+y-6)=0 \\ (y-1)(x+2)=12. \end{cases}$

10*. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja $f(x)=\frac{7x+1}{3x+4}$ przyjmuje wartości całkowite.

11*. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniających równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}$.

IV. Ciągi liczbowe

1. Pojęcie ciągu i ciągu liczbowego. Sposoby określania ciągów liczbowych

Ciągiem nieskończonym nazywamy **funkcję** f, która odwzorowuje zbiór N_+ liczb naturalnych dodatnich w pewien niepusty zbiór A.

!
O

Definicję tę można też zapisać następująco:
Funkcję $f: N_+ \rightarrow A$ nazywamy **ciągiem nieskończonym.**
Wartości tej funkcji określamy też jako **wyrazy** ciągu.
Ciąg nieskończony nosi miano **liczbowego**, gdy jego wyrazy są liczbami. Zatem:
funkcję $f: N_+ \rightarrow \boldsymbol{R}$ nazywamy **ciągiem liczbowym nieskończonym**;
funkcję $f: \{1, 2, 3, \ldots, k\} \rightarrow \boldsymbol{R}$ nazywamy **ciągiem skończonym k-wyrazowym.**

Wartość $f(n)$ funkcji f dla argumentu n będziemy oznaczać przez a_n (lub b_n, c_n itd.) i nazywać n-tym (czytaj: entym) wyrazem ciągu, sam zaś ciąg będziemy oznaczać $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ lub krótko (a_n).

Liczby $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ nazywamy **wskaźnikami** lub **indeksami** wyrazów.

Uwaga. W naszym podręczniku „ciąg (a_n)" będzie oznaczał ciąg liczbowy nieskończony.

Przyjrzyjmy się przykładom różnych ciągów liczbowych:

1. (n) oznacza ciąg kolejnych dodatnich liczb naturalnych $(1, 2, 3, \ldots)$. Jest to funkcja tożsamościowa zbioru N_+.
2. $(2n)$ oznacza ciąg kolejnych naturalnych, dodatnich liczb parzystych: $(2, 4, 6\ldots)$.
3. (3^n) oznacza ciąg kolejnych naturalnych, dodatnich potęg liczby 3: $(3^1, 3^2, 3^3, 3^4\ldots)$.
4. Jeżeli K_n oznacza koło o promieniu długości n i o środku w danym punkcie S, to (K_n) oznacza ciąg kół o wspólnym środku S i o promieniach, których długości są dodatnimi liczbami naturalnymi.
5. (x, y), czyli para współrzędnych punktu na płaszczyźnie, jest ciągiem 2-wyrazowym, w którym $a_1 = x$, $a_2 = y$.
6. $(5, 10, 15, \ldots, 100)$ jest ciągiem 20-wyrazowym dodatnich liczb naturalnych podzielnych przez 5 i nie większych od 100.

Zauważmy, że każdy ciąg skończony ma wyraz pierwszy i ostatni, natomiast ciąg nieskończony ma wyraz pierwszy, lecz nie ma wyrazu ostatniego.

Ciąg może być podany w różny sposób, najczęściej za pomocą:

- zapisu słownego,
- wzoru ogólnego,
- wzoru rekurencyjnego (zwanego też wzorem indukcyjnym), to znaczy tak, że aby obliczyć jakiś wyraz ciągu, należy znać wyrazy poprzednie.

Przykład 1. Ciąg (p_n) został określony następująco: p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wypisz kilka początkowych wyrazów tego ciągu.
Rozwiązanie:

Ponieważ liczby pierwsze występują w ciągu liczb naturalnych w następującym porządku: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,..., więc wyrazami ciągu (p_n) są kolejno: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$ itd.

Przykład 2. Ciąg (a_n) podany jest wzorem ogólnym:

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n-1).$$

Wypisz kilka początkowych wyrazów tego ciągu.
Rozwiązanie:

Zgodnie z podanym wzorem:

$$a_1 = (-1)^{1-1}(2 \cdot 1 - 1) = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_2 = (-1)^{2-1} \cdot (2 \cdot 2 - 1) = -1 \cdot 3 = -3,$$

$$a_3 = (-1)^{3-1}(2 \cdot 3 - 1) = 1 \cdot 5 = 5, \quad a_4 = (-1)^{4-1} \cdot (2 \cdot 4 - 1) = -1 \cdot 7 = -7.$$

Przykład 3. Ciąg (f_n) zapisano następująco: $f_1 = 2$, $f_{n+1} = 2 f_n$ dla każdego $n \in N_+$. Wyznacz kilka wyrazów tego ciągu.
Rozwiązanie:

$$f_2 = 2 \cdot f_1 = 2 \cdot 2 = 4, \quad f_3 = 2 \cdot f_2 = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$f_4 = 2 \cdot f_3 = 2 \cdot 8 = 16, \quad f_5 = 2 \cdot f_4 = 2 \cdot 16 = 32.$$

Przykład 4. Ciąg (F_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla każdego $n \geqslant 2$ (jest to tzw. ciąg Fibonacciego). Wypisz kilka początkowych wyrazów tego ciągu.
Rozwiązanie:

Zgodnie z podanym wzorem:

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \quad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21 \text{ itd.}$$

Przykład 5*. Ciąg (a_n) ma następujący zapis: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (2n+1)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ Udowodnij, że (a_n) jest ciągiem kwadratów kolejnych liczb naturalnych dodatnich.
Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję matematyczną:

1. Sprawdzamy prawdziwość tezy dla $n = 1$. Zgodnie z podanym w zadaniu założeniem $a_1 = 1 = 1^2$.
2. Wykazujemy, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, jeśli $a_n = n^2$, to $a_{n+1} = (n+1)^2$. Istotnie, zgodnie z podanym wzorem rekurencyjnym i założeniem indukcyjnym:

$$a_{n+1} = a_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Zatem na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $a_n = n^2$ dla wszystkich $n \in N_+$.

Przykład 6*. Wykaż, że n-ty wyraz ciągu Fibonacciego (zob. przykład 4) określony jest wzorem:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(jest to tzw. wzór Bineta).

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję matematyczną:

1. Sprawdzamy najpierw, czy $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$.

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1,$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6+2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1.$$

2. Wykazujemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $n \geqslant 2$, jeśli:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \text{ i } F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right], \text{ to}$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Istotnie, zgodnie ze wzorem rekurencyjnym określającym ciąg (F_n) i na mocy założenia indukcyjnego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-\sqrt{5}+2}{2}\right]\right\} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right]-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right]-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że podany wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego jest prawdziwy dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Pytania i zadania

1. Co to jest:
   a) ciąg nieskończony,
   b) ciąg skończony,
   c) ciąg liczbowy?
   Podaj przykłady.
2. Jaki wskaźnik będzie miał wyraz:
   a) szósty po wyrazie czwartym,
   b) piąty przed wyrazem ósmym,
   c) n-ty po wyrazie dziesiątym,
   d) k-ty przed wyrazem setnym,
   e) dwudziesty po wyrazie a_n?
3. Zapisz ogólnym wzorem:
   a) sumę dwóch kolejnych wyrazów ciągu,
   b) iloczyn dwóch kolejnych wyrazów ciągu,
   c) średnią arytmetyczną wyrazów sąsiadujących z a_n,
   d) średnią geometryczną wyrazów sąsiadujących z a_n.
4. Wyznacz kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), gdy:
   a) $a_n = n^3$; b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; c) $a_n = 2^n - 1$; d) $a_n = 1^n + (-1)^n$;
   e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$; f) $a_n = n\left(1-(-1)^n\right)$; g) $a_n = n - \frac{1}{n}$.

5. Wyznacz kilka początkowych wyrazów ciągu podanego wzorem rekurencyjnym:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$; b) $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -a_n$;

c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n$; d) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$.

6*. Wyznacz x_{1000}, jeśli $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ oraz x_n jest najmniejszą liczbą złożoną większą od $2x_{n-1} - x_{n-2}$ dla każdej liczby naturalnej n większej od dwóch.

7. Podaj wzór na ogólny wyraz ciągu, mając kilka jego początkowych wyrazów:

a) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$; b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$; c) $1, -8, 27, -64, 125, \ldots$;

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; e) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$; f) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

8. Wypisz kilka następnych wyrazów ciągu:

a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$; b) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$; c) p, w, ś, c, p, ...;

d) s, l, m, k, m, c, ...; e) j, d, t, c, p, s, ...; f*) j, f, m, a, m, j, ...

9*. Dany jest ciąg (a_n): $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, n = 1, 2, 3\ldots$ Wyznacz sumę $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

10*. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(n+1)x_n + 1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Oblicz $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

11*. Wyznacz 2003 wyraz ciągu x_n, jeśli:

a) $x_1 = 7, x_{n+1} = \sqrt{\left|x_n^2 - 16\right|}, n = 1, 2, 3, \ldots$;

b) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$ dla $n = 4, 5, 6, \ldots$

2. Monotoniczność ciągu liczbowego

Monotoniczność funkcji liczbowych zdefiniowaliśmy już w klasie pierwszej. Wiemy, że funkcja $f: X \to Y$ jest rosnąca w zbiorze X, gdy ze wzrostem argumentów tej funkcji wzrastają jej wartości, czyli, inaczej mówiąc, gdy spełnia warunek:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right).$$

Podobnie o funkcji $f: X \to Y$ powiemy, że jest malejąca w zbiorze X, gdy ze wzrostem jej argumentów maleją wartości tej funkcji, a więc gdy spełnia warunek:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right).$$

Mówimy też, że funkcja f jest monotoniczna w zbiorze X, gdy jest w tym zbiorze rosnąca lub malejąca.

Monotoniczność ciągów liczbowych określamy nieco prościej: wystarczy porównywać ich kolejne wyrazy, bo dziedziną ciągów liczbowych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Ciąg (a_n) nazywamy **rosnącym**, gdy każdy jego wyraz jest mniejszy od wyrazu następującego po nim, czyli gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **malejącym**, gdy każdy jego wyraz jest większy od wyrazu następującego po nim, czyli gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność $a_n > a_{n+1}$.

Ciągi rosnące i ciągi malejące obejmujemy wspólną nazwą **ciągów monotonicznych**.

Gdy ciąg (a_n) jest skończony k-wyrazowy, to mówimy, że jest on rosnący (lub malejący), gdy nierówność $a_n < a_{n+1}$ (lub $a_n > a_{n+1}$) spełniona jest dla wszystkich liczb naturalnych dodatnich n takich, że $n \leqslant k-1$.

Zbadać monotoniczność ciągu oznacza rozstrzygnąć, czy jest on rosnący czy malejący. To zaś sprowadza się do zbadania, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stale dodatnia czy stale ujemna.

Uwaga. Czasami, aby zbadać monotoniczność ciągu (a_n), prościej będzie rozstrzygnąć, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stale większy od 1 lub stale mniejszy od 1. Nietrudno bowiem zauważyć, że gdy $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, wówczas ciąg (a_n) jest:

– rosnący, gdy wszystkie jego wyrazy są dodatnie;

– malejący, gdy wszystkie jego wyrazy są ujemne.

Jeżeli w podanych definicjach ciągu rosnącego i ciągu malejącego nierówności $a_{n+1} > a_n$ i $a_{n+1} < a_n$ zastąpimy odpowiednio nierównościami $a_{n+1} \geqslant a_n$ i $a_{n+1} \leqslant a_n$, to wtedy otrzymamy definicje ciągu niemalejącego i nierosnącego.

Przykład 1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), gdy $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Rozwiązanie: Jeżeli $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, to $a_{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1+1} = \frac{n}{n+2}$. Wówczas dla każdego n otrzymujemy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n-(n^2+n-2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

czyli $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n, co oznacza, że ciąg ten jest rosnący.

Przykład 2. Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{n+2}{2n+1}$ jest malejący.
Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdego n:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+3}{2n+3} - \frac{n+2}{2n+1} = \frac{(n+3)(2n+1) - (n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = -\frac{3}{(2n+1)(2n+3)},$$

więc $b_{n+1} - b_n < 0$, czyli $b_{n+1} < b_n$ dla każdego n. Oznacza to, że ciąg (b_n) jest malejący.

Przykład 3*. Wykaż, że ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$ jest rosnący.
Rozwiązanie:

Jeżeli $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$, to:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}, \text{ więc:}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{(2n+2) - (2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego n, czyli ciąg ten jest rosnący.

Przykład 4*. Wyznacz największy wyraz ciągu (a_n) o wzorze $a_n = \frac{n}{1{,}01^n}$.
Rozwiązanie:

Jeżeli $a_n = \frac{n}{1{,}01^n}$, to $a_{n+1} = \frac{n+1}{1{,}01^{n+1}}$, więc:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\left(\frac{101}{100}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{101}{100}\right)^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{100}{101}. \text{ Stąd:}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \iff \frac{n+1}{n} \cdot \frac{100}{101} > 1 \iff 10(n+1) > 101n \iff n < 100,$$

czyli $a_{n+1} > a_n$ dla $n < 100$, zaś $a_{n+1} < a_n$ dla $n > 100$.

Wynika stąd że $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{99} < a_{100} > a_{101} > a_{102} > \ldots$

Dlatego $\max\{a_n ; n \in N_+\} = a_{100} = \frac{100^{101}}{101^{100}}$.

Przykład 5. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), gdy $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.
Rozwiązanie:

Zachodzą dwa przypadki:

1. Jeżeli n jest liczbą parzystą, wtedy $n+1$ jest liczbą nieparzystą i wówczas $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, zaś $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n}$, więc $a_n > a_{n+1}$.
2. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n+1$ jest liczbą parzystą; a wtedy $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, zaś $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$. Wobec tego $a_n < a_{n+1}$. Ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Przykład 6*. Zbadaj monotoniczność ciągu Fibonacciego.
Rozwiązanie:

Ciągiem Fibonacciego jest, jak już wiemy, ciąg (F_n) określony następująco:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Udowodnimy, stosując zasadę indukcji matematycznej, że jest to ciąg niemalejący. A zatem wykażemy, że $F_{n+1} \geqslant F_n$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n. Oczywiście $F_2 \geqslant F_1$, bo $F_1 = F_2 = 1$.

Udowodnimy teraz, że dla każdego $n > 2$, jeśli $F_n \geqslant F_{n-1}$ i $F_{n-1} \geqslant F_{n-2}$, to $F_{n+1} \geqslant F_n$. Istotnie, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geqslant F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$, zgodnie z określeniem ciągu (F_n).

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $F_{n+1} \geqslant F_n$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n. Oznacza to, że ciąg (F_n) jest niemalejący.

Przykład 7*. Wykaż, że ciąg (x_n) określony wzorem $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n-1} + \dfrac{1}{x_n}}$ dla $n = 2, 3, \ldots$ jest malejący.
Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami dodatnimi. Istotnie, $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Przy założeniu, że x_{n-1} i x_n są dodatnie, otrzymamy:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{x_n}} > 0.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $x_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n. Wobec tego dla każdego n:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n}{x_{n-1}x_n + 1} < \frac{x_n}{1} = x_n, \text{ bo } x_{n-1}x_n + 1 > 1.$$

Zatem ciąg (x_n) jest malejący.

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg:
   a) rosnący, b) malejący, c) niemalejący,
   d) nierosnący, e) monotoniczny?
2. Co to znaczy, że ciąg:
   a) nie jest rosnący; b) nie jest malejący?

3. Podaj przykład ciągu nieskończonego, który:

   a) jest rosnący i ma wszystkie wyrazy ujemne;

   b) jest malejący i ma wszystkie wyrazy z przedziału $(1; 2)$.

4. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wzorze ogólnym:

   a) $a_n = \frac{n}{2n-1}$; b) $a_n = \frac{2n-1}{n}$; c) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$; d) $a_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$;

   e) $a_n = 2 \cdot 3^n$; f) $a_n = \frac{n+2}{2n+1}$; g) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

5. Sprawdź, czy jest monotoniczny ciąg:

   a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; b) $b_n = 2n - n^2$; c) $c_n = n + (-1)^n$.

6. Wykaż, że ciąg:

   a) $a_n = n^2 - 3n + 2$ jest niemalejący;

   b) $b_n = |n-4| - (n-2)$ jest nierosnący.

7*. Zbadaj monotoniczność ciągu:

   a) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

   b) $b_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

   c) $c_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

   d) $d_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

8*. Wyznacz największy wyraz ciągu (x_n), jeśli:

   a) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$; b) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$; c) $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

3. Ciąg arytmetyczny i jego własności

Ciąg, w którym różnica między dowolnym wyrazem i wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym jest stała dla danego ciągu, nazywamy **ciągiem arytmetycznym**. !

Tak więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny $\iff \bigvee_{r \in R} \bigwedge_{n \in N_+} (a_{n+1} - a_n = r)$. Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego.

Uwaga. Ciąg arytmetyczny może być nieskończony lub skończony, przy czym ciąg skończony musi być co najmniej trójwyrazowy.

A oto przykłady kilku ciągów arytmetycznych:

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 1$;

$4, 2, 0, -2, -4, \ldots$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $r = -2$;

$-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \frac{1}{2}$;

$-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \sqrt{2}$;

$c, c, c, c, \ldots$, gdzie $c \in \boldsymbol{R}$ – ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 0$.

Z definicji ciągu arytmetycznego wynika następujący wniosek:

Wniosek. Ciąg arytmetyczny o różnicy r jest:

– **rosnący**, gdy $r > 0$;

– **malejący**, gdy $r < 0$;

– **stały**, gdy $r = 0$.

Zapisując podaną w definicji ciągu arytmetycznego równość $a_{n+1} - a_n = r$ w równoważnej postaci: $a_{n+1} = a_n + r$, widzimy, że każdy wyraz ciągu arytmetycznego jest sumą wyrazu poprzedniego i różnicy tego ciągu. Wnioskujemy stąd, że ciąg ten określają jego wyraz pierwszy i różnica; obie te liczby pozwalają wyznaczać kolejne wyrazy ciągu.

Przykład 1. Wyznacz a_2, a_3, a_4, a_5 w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 3, r = -5$.
Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdego n:

$a_{n+1} = a_n + r$, więc:

$a_2 = a_1 + r = 3 + (-5) = -2,$

$a_3 = a_2 + r = (-2) + (-5) = -7,$

$a_4 = a_3 + r = (-7) + (-5) = -12,$

$a_5 = a_4 + r = (-12) + (-5) = -17.$

Z definicji ciągu arytmetycznego można wysnuć jako wniosek jeszcze jedną jego własność:

Twierdzenie

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $n \geqslant 2$, gdy ciąg (a_n) jest nieskończony, takiej zaś, że $2 \leqslant n \leqslant k-1$, gdy ciąg (a_n) jest skończony k-wyrazowy, zachodzi równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

□ Dowód. Wystarczy zauważyć, że:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \iff 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}. \square$$

Przykład 2. Między liczby 28 i 52 wstaw takie dwie liczby x i y, aby ciąg $(28, x, y, 52)$ był ciągiem arytmetycznym.
Rozwiązanie:
Ciąg $(28, x, y, 52)$ będzie arytmetyczny, gdy liczby x i y spełnią równania $2x = 28 + y$ i $2y = x + 52$.
Po rozwiązaniu układu tych równań, czyli równoważnego mu układu:

$$\begin{cases} 2x - y = 28 \\ x - 2y = -52, \end{cases}$$

otrzymujemy $x = 36$, $y = 44$.
Odpowiedź: Ciąg będzie arytmetyczny, jeśli $x = 36$, $y = 44$.

Przykład 3. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Przeciwprostokątna ma długość 30. Oblicz długości przyprostokątnych.
Rozwiązanie:
Oznaczmy przez a i b długości przyprostokątnych tego trójkąta i przyjmijmy, że $a \leqslant b$. Ponieważ ciąg $(a, b, 30)$ jest arytmetyczny, więc $2b = a + 30$. Ponadto z twierdzenia Pitagorasa wynika równanie $a^2 + b^2 = 30^2$.
Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2b = a + 30 \\ a^2 + b^2 = 900, \end{cases}$$

otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} a = 2b - 30 \\ (2b - 30)^2 + b^2 = 900, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b - 30 \\ 5b^2 - 120b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b - 30 \\ b^2 - 24b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b - 30 \\ b = 24, \end{cases}$$

bo $b > 0$ i ostatecznie $\begin{cases} a = 18 \\ b = 24. \end{cases}$

Odpowiedź: Długości przyprostokątnych wynoszą: $a = 18$, $b = 24$.

Przykład 4. Trzy liczby dodatnie a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnij, że liczby $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ również tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:
Ponieważ (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, więc $2b = a + c$.

Aby wykazać, że ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ jest arytmetyczny, udowodnimy, że:

$$\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Zadanie sprowadza się więc do wykazania, że jeśli $2b = a + c$, to:

$$\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Mogą zajść tutaj dwa przypadki:

1. (a, b, c) jest ciągiem stałym, wtedy ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ też jest stały, a więc jest arytmetyczny.
2. (a, b, c) nie jest ciągiem stałym. Wówczas:

$$\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{2}{c-a} \cdot \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{2}{2(b-a)} \cdot \left(\sqrt{c}-\sqrt{b}+\sqrt{b}-\sqrt{a}\right) = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{b-a} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} =$$

$$= \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}},$$

bo $2b = a + c \iff c - a = 2(b-a) \iff c - b = b - a.$

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg arytmetyczny? Podaj przykłady.
2. Omów monotoniczność ciągu arytmetycznego.
3. Podaj charakterystyczną własność ciągu arytmetycznego.
4. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n), w którym:

   a) $a_1 = -2,\ r = 3$; b) $a_2 = 2,\ r = -1$; c) $a_1 = 0,\ a_2 = 2$.
5. Między liczby 1 i 257 wstaw takie liczby $x, y, z,$ aby ciąg $(1, x, y, z, 257)$ był arytmetyczny.
6. Długości boków trójkąta prostokątnego o polu 150 tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta.
7. Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 30°$. Wyznacz miary kątów tego czworokąta.
8. Dla jakich wartości n liczby:

   a) $2n-1,\ 2n+3,\ 2n+7$; b) $n^2,\ (n+1)^2,\ (n+2)^2-2$

   tworzą ciąg arytmetyczny?
9. Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, to:

   $3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 6(a-b)^2 + (a+b+c)^2.$
10. Udowodnij, że jeżeli ciągi (a, b, c) i $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ są arytmetyczne, to $a = b = c$.
11. Udowodnij, że jeżeli $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ i ciąg $\left(\frac{1}{b+a}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}\right)$ jest arytmetyczny, to ciąg $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ także jest arytmetyczny.

4. Wzór na n-ty wyraz i wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego

Wiemy już, że jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość $a_{n+1} = a_n + r$.

Stąd $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$, $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$ i ogólnie:

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

!

Jest to wzór na ogólny wyraz ciągu arytmetycznego (a_n). Pozwala on obliczyć dowolny wyraz ciągu arytmetycznego, gdy znamy jego wyraz pierwszy i różnicę.

□ Dowód twierdzenia**. Zastosujemy indukcję matematyczną:

1. Sprawdzenie dla $n = 1$:

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r = a_1.$$

2. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli $a_n = a_1 + (n-1)r$, to $a_{n+1} = a_1 + nr$.
Istotnie, z określenia ciągu arytmetycznego i na mocy założenia indukcyjnego:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr.$$

Zatem na podstawie indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość dowodzonego wzoru dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. □

Przykład 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_1 = -2$, $r = 5$. Oblicz a_{2003}.
Rozwiązanie:

Zgodnie z poznanym wzorem obliczamy:

$$a_{2003} = a_1 + (2003-1)r = -2 + 2002 \cdot 5 = 10008.$$

Odpowiedź: $a_{2003} = 10008$.

Przykład 2. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_8 = 37$, $a_{11} = 52$. Oblicz a_{20}.
Rozwiązanie:

Z treści zadania wynikają równości: $a_1 + 7r = 37$ i $a_1 + 10r = 52$. Po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{cases} a_1 + 7r = 37 \\ a_1 + 10r = 52 \end{cases}$$

z niewiadomymi a_1 i r otrzymujemy $a_1 = 2$, $r = 5$.

Zatem $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 5 = 97$.

Odpowiedź: $a_{20} = 97$.

Przykład 3. W pewnym ciągu arytmetycznym $a_m = n$ i $a_n = m$, gdzie $m \neq n$. Oblicz a_p.
Rozwiązanie:

Niech r będzie różnicą tego ciągu. Wówczas $a_m = a_1 + (m-1)r$ i $a_n = a_1 + (n-1)r$. Wtedy $a_m - a_n = (m-n)r$, ale także $a_m - a_n = n - m$.

Stąd $(m-n)r = n - m$ i dalej $r = -1$, bo $m - n \neq 0$.

Wobec tego $a_p - a_n = (p-n)r = (p-n)(-1) = n-p$ i ostatecznie:
$a_p = a_n + n - p = m + n - p.$

Odpowiedź: $a_p = m + n - p.$

Rozważmy skończony ciąg arytmetyczny: $(-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16)$. W ciągu tym równe są następujące sumy wyrazów: $-5 + 16 = -2 + 13 = 1 + 10 = 4 + 7$. Mówimy wówczas, że wyrazy, które dodajemy, są jednakowo oddalone od początku i końca danego ciągu. Nietrudno jest teraz udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie

W skończonym n-wyrazowym ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ suma każdych dwóch wyrazów jednakowo oddalonych od początku i końca ciągu jest stała i wynosi $a_1 + a_n$.

☐ Dowód. W n-wyrazowym ciągu $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ wyrazami, o których mowa w twierdzeniu, są: a_{1+k} i a_{n-k} dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ponieważ $a_{1+k} = a_1 + kr$ i $a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)r$, więc:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + kr + a_1 + (n-k-1)r = a_1 + a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n,$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. ☐

Niech S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów ciągu (a_n). Mamy więc:

$S_1 = a_1,$
$S_2 = a_1 + a_2,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$
....
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$

S_n nazywamy też n-tą sumą częściową ciągu (a_n).

Twierdzenie

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi wzór $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

☐ Dowód. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wówczas, zgodnie z udowodnionym poprzednio twierdzeniem, mamy:

$$2S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n) + (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) =$$

$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{1+k} + a_{n-k}) + \ldots + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Załóżmy teraz, że wyrazy ciągu (a_n) spełniają dla każdej dodatniej liczby naturalnej n wzór:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Wykażemy, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $n \geqslant 3$, zachodzą równości:

(1) $2S_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_{n-1})$,

(2) $2S_n = n(a_1 + a_n)$,

(3) $2S_{n+1} = (n+1)(a_1 + a_{n+1})$.

Jeśli odejmiemy od równości (2) równość (1), zaś od równości (3) równość (2), otrzymamy równości:

(4) $2a_n = a_1 + na_n - (n-1)a_{n-1}$,

(5) $2a_{n+1} = a_1 + (n+1)a_{n+1} - na_n$.

Jeżeli odejmiemy od równości (5) równość (4), otrzymamy związek:

(6) $2(a_{n+1} - a_n) = (n+1)a_{n+1} - 2na_n + (n-1)a_{n-1}$, czyli związek:

(7) $2(n-1)a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n+1})$,

skąd, po podzieleniu obu stron przez $n - 1$, wynika równość:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

która dowodzi, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny. $\square$

Przykład 4. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000.
Rozwiązanie:

Liczby naturalne od 1 do 1000 tworzą ciąg arytmetyczny, w którym:

$a_1 = 1$, $n = 1000$, $a_{1000} = 1000$.

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_{1000} = \frac{1 + 1000}{2} \cdot 1000 = 1001 \cdot 500 = 500500.$$

Odpowiedź: 500500.

Przykład 5. Oblicz sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które z dzielenia przez 5 dają resztę 1.
Rozwiązanie:

Liczba naturalna, która z dzielenia przez 5 daje resztę 1, jest postaci $5k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną. Należy zatem obliczyć sumę liczb:

1, 6, 11, 16, 21, 26, …, 496.

Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1$, $n = 100$, $a_{100} = 496$.

Stąd $S_{100} = \dfrac{1 + 496}{2} \cdot 100 = 497 \cdot 50 = 24850$.

Odpowiedź: 24850.

Przykład 6. Rozwiąż równanie $1+4+7+\ldots+x=117$.
Rozwiązanie:

Lewa strona równania jest sumą ciągu arytmetycznego, w którym:

$a_1=1,\ \ r=3,\ \ x=a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2.$

Stąd $S_n=\frac{1+3n-2}{2}\cdot n=\frac{(3n-1)n}{2}.$

Po rozwiązaniu w zbiorze liczb naturalnych równania $\frac{(3n-1)n}{2}=117$, czyli równania $3n^2-n-234=0$, otrzymujemy $n=9$.

Wobec tego $x=3n-2=3\cdot 9-2=25$.

Odpowiedź: $x=25$.

Przykład 7*. Udowodnij, że jeżeli S_n, S_{2n} i S_{3n} oznaczają sumy odpowiednio $n, 2n, 3n$ początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego, to spełniają równość:

$S_{3n}=3(S_{2n}-S_n).$

Rozwiązanie:

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem arytmetycznym o różnicy r, zaś S_n, S_{2n} i S_{3n} niech oznaczają sumy odpowiednio n, $2n$ i $3n$ początkowych jego wyrazów. Mamy więc równości:

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n,\ S_{2n}=\frac{a_1+a_{2n}}{2}\cdot 2n$ i $S_{3n}=\frac{a_1+a_{3n}}{2}\cdot 3n$, a ponadto:

$$a_n+a_{3n}=a_1+(n-1)r+a_1+(3n-1)r=2a_1+(4n-2)r=$$

$$=2\left(a_1+(2n-1)r\right)=2a_{2n}.$$

Stąd:

$$3(S_{2n}-S_n)=3\left(\frac{a_1+a_{2n}}{2}\cdot 2n-\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right)=$$

$$=\frac{2(a_1+a_{2n})-(a_1+a_n)}{2}\cdot 3n=\frac{2a_1+2a_{2n}-a_1-a_n}{2}\cdot 3n=$$

$$=\frac{a_1+2a_{2n}-a_n}{2}\cdot 3n=\frac{a_1+a_{3n}}{2}\cdot 3n=S_{3n}.$$

Przykład 8*. Ile wyrazów ma ciąg arytmetyczny, którego wyrazy spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=256 \\ a_2+a_{2n}=64\,? \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jest arytmetyczny o różnicy r, to ciąg $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ jest także arytmetyczny o różnicy $2r$. Lewa strona pierwszego równania danego układu jest więc sumą n pierwszych wyrazów ciągu $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$.

Wobec tego równanie $a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=256$ jest równoważne równaniu $\frac{a_2+a_{2n}}{2}\cdot n=256$, które na mocy drugiego równania układu prowadzi do równania $32n=256$. Stąd $n=8$.

Odpowiedź: Dany ciąg arytmetyczny ma 16 wyrazów.

Pytania i zadania

1. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).
2. Podaj wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).
3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 7$ i $a_6 = 13$. Wyznacz a_1 i a_5.
4. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 10, piąty wyraz 28, a ostatni 58. Oblicz wyraz pierwszy oraz liczbę wszystkich wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
5. Napisz kilka pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego n-ty wyraz dany jest wzorem:

   a) $a_n = \frac{3n-1}{6}$; b) $a_n = \frac{5n+7}{3}$; c) $a_n = \frac{8n-3}{5}$.
6. Napisz kilka pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego, dla którego suma n początkowych wyrazów wynosi:

   a) $S_n = 5n^2 + 3n$; b) $S_n = 7n^2 - 5n$; c) $S_n = 3n^2$.

7*. Ile wyrazów ma ciąg arytmetyczny, którego wyrazy spełniają układ równań:

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = 588 \text{ i } a_1 + a_{2n+1} = 56?$$

8. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego wynosi zero. Oblicz S_5.

9*. W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi równość $\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$. Udowodnij, że: $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

5. Ciąg arytmetyczny w zadaniach

Podrozdział ten w całości poświęcimy zastosowaniom ciągu arytmetycznego w zadaniach.

Przykład 1. Przy wykopie studni za pierwszy metr głębokości zapłacono 20 zł, a za każdy następny metr – o 10 zł więcej niż za poprzedni. Całkowity koszt wykopu studni wyniósł 1350 zł. Jak głęboka jest studnia?

Rozwiązanie:

Koszty drążenia kolejnych metrów głębokości studni tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 20$ zł oraz różnicy $r = 10$ zł. Całkowity koszt wykopu studni wyniósł 1350 zł. Zakładając przy tym, że wykopano ją na n metrów głębokości, otrzymujemy, zgodnie ze wzorem na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, równanie:

$$\frac{20 + 20 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n = 1350, \text{ stąd:}$$

$$(20 + 5(n-1))n = 1350, \text{ czyli:}$$

$$(n+3)n = 270$$

i ostatecznie $n = 15$.

Odpowiedź: Studnia ma głębokość 15 m.

Przykład 2. Bartek wpłacał na konto w banku co miesiąc o 200 zł więcej niż w poprzednim miesiącu. W jakim czasie uzbierał 18450 zł, jeżeli jego pierwszą wpłatą na to konto było 1250 zł?
Rozwiązanie:

Wpłaty, jakich dokonywał Bartek, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1250$ i różnicy $r = 200$. Załóżmy, że kwotę 18450 zł Bartek uzbierał w ciągu n miesięcy.

Zatem n-ty wyraz tego ciągu wpłat $a_n = 1250 + (n-1)200 = 200n + 1050$. Stąd ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie:

$$\frac{1250 + 200n + 1050}{2} \cdot n = 18450,$$

które jest równoważne kolejno równaniom:

$$50n(2n + 23) = 18450,$$

$$2n^2 + 23n - 369 = 0.$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe, obliczamy:

$$\Delta = 23^2 + 8 \cdot 369 = 3481 = 59^2$$

i pierwiastki: $n_1 = \frac{-23 - 59}{4} = -\frac{41}{2}$, $n_2 = \frac{-23 + 59}{4} = 9$.

Warunkom zadania odpowiada tylko $n_2 = 9$.

Odpowiedź: Kwotę 18450 zł Bartek uzbierał w ciągu 9 miesięcy.

Przykład 3. Wydajność pracy załogi robotniczej rosła co miesiąc w ciągu arytmetycznym. Wydajność pracy w dwunastym miesiącu była o $26\frac{19}{31}\%$ większa niż w pierwszym. Wiadomo, że roczna produkcja wyniosła 1686 jednostek. Oblicz normę z pierwszego miesiąca oraz stały jej przyrost.
Rozwiązanie:

Załóżmy, że w pierwszym miesiącu załoga wykonała a jednostek. Wobec tego w dwunastym miesiącu wykonała ich:

$$a + 26\frac{19}{31}\%\, a = \frac{157}{124}a.$$

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie:

$$\frac{a + \frac{157}{124}a}{2} \cdot 12 = 1686.$$

Rozwiązując je, otrzymujemy kolejno:

$$a + \frac{157}{124}a = 281,$$

$$\frac{281}{124}a = 281, \text{ skąd } a = 124,$$

zaś $\frac{157}{124}a = \frac{157}{124} \cdot 124 = 157.$

Liczba 157 jest dwunastym wyrazem ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym 124. Oznaczając przez r różnicę tego ciągu, otrzymujemy kolejne równanie:

$124 + 11r = 157$,

skąd $11r = 33$

i ostatecznie $r = 3$.

Odpowiedź: Załoga wykonała w pierwszym miesiącu 124 jednostki, a w każdym następnym o 3 jednostki więcej.

Przykład 4. W piwnicy stoją dwie 77-litrowe beczki, pierwsza pełna wody, natomiast druga – pusta. Z pierwszej beczki przez otwór w dnie ubyły w pierwszej sekundzie 4 l wody, a w każdej następnej ubywa o 0,2 l mniej niż w poprzedniej. Jednocześnie do drugiej beczki wlało się z kranu w pierwszej sekundzie 1,5 l wody, a w każdej następnej przybywa o 0,5 l więcej niż w poprzedniej. Po ilu sekundach w każdej beczce będzie tyle samo wody?

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że poziom wody w każdej z beczek zmienia się w ciągu arytmetycznym:

– w pierwszej – jak w ciągu o pierwszym wyrazie $a_1 = 4$ i różnicy $r = -0{,}2$,

– w drugiej – jak w ciągu o pierwszym wyrazie $b_1 = 1{,}5$ i różnicy $r = 0{,}5$.

Załóżmy, że poziomy wody w obu beczkach wyrównają się po n sekundach. Wobec tego z pierwszej beczki ubędzie w tym czasie:

$$\frac{4 + 4 + (n-1)\cdot(-0{,}2)}{2}\cdot n \text{ litrów wody,}$$

a do drugiej beczki wleje się:

$$\frac{1{,}5 + 1{,}5 + (n-1)\cdot 0{,}5}{2}\cdot n \text{ litrów wody.}$$

A ponieważ wówczas poziomy wody w obu beczkach się wyrównają, stąd równanie:

$$77 - \frac{4 + 4 + (n-1)\cdot(-0{,}2)}{2}\cdot n = \frac{1{,}5 + 1{,}5 + (n-1)\cdot 0{,}5}{2}\cdot n.$$

Po jego przekształceniu otrzymamy kolejno równoważne mu równania:

$$77 - \left(4 - 0{,}1(n-1)\right)n = \frac{3 + 0{,}5(n-1)}{2}\cdot n,$$

$$\left(4 - 0{,}1(n-1)\right)n + \frac{3 + 0{,}5(n-1)}{2}\cdot n = 77,$$

$$\left(8 - 0{,}2(n-1) + 3 + 0{,}5(n-1)\right)\cdot n = 154,$$

$$\left(11 + 0{,}3(n-1)\right)\cdot n = 154,$$

$$0{,}3n^2 + 10{,}7n - 154 = 0,$$

$$3n^2 + 107n - 1540 = 0.$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe, obliczamy najpierw jego wyróżnik:

$$\Delta = 107^2 - 4\cdot 3\cdot(-1540) = 107^2 + 12\cdot 1540 = 29929 = 173^2,$$

a następnie – pierwiastki:

$$n_1 = \frac{-107 - 173}{6} = -\frac{140}{3},\ n_2 = \frac{-107 + 173}{6} = \frac{66}{6} = 11.$$

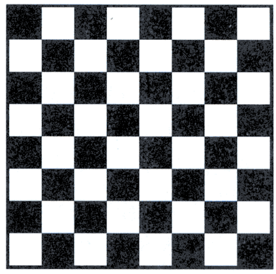
Widzimy, że tylko drugi z nich spełnia warunki zadania.
Odpowiedź: W każdej beczce będzie tyle samo wody po 11 sekundach.

Pytania i zadania

1. Dół, jaki powstał po wykopaniu piasku, ma kształt prostopadłościanu. Powierzchnia dołu wynosi 14,8 m^2, a jego wymiary, z których największy to głębokość dołu, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 0,5 m. Ile metrów sześciennych piasku wykopano?
2. Dwaj zapaleni turyści Bolek i Lolek wyruszyli w świat. Najpierw wyruszył Bolek, który pokonuje każdego dnia 40 km. Po 6 dniach z tego samego miejsca, co Bolek, wyruszył w podróż Lolek, który pierwszego dnia przebył 82 km, a każdego następnego dnia o 4 km mniej niż dnia poprzedniego. W którym dniu i w jakiej odległości od miejsca wymarszu Lolek dogoni Bolka?
3. W pewnej rodzinie ojciec – wielki miłośnik książek – daje każdemu ze swoich pięciu synów w dzień ich urodzin, począwszy od piątego roku życia, tyle książek w prezencie, ile dany syn kończy lat. Wiadomo przy tym, że liczby, wyrażające wiek każdego z nich, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, natomiast ich wspólny zbiór książek liczy 325 woluminów. Ile lat ma każdy z synów?
4. Wartość użytkowa pewnej maszyny maleje z roku na rok w ciągu arytmetycznym. W jakim czasie maszyna ta straci całkowicie swą wartość, jeśli wiadomo, że jej wartość po 25 latach była trzy razy mniejsza niż po 15 latach?
5. Na płycie kuchennej stoją dwa kotły, oba w kształcie walca obrotowego. Jeden z nich jest pełen wody, a drugi pusty. Z pierwszego z nich o pojemności 65,4 l wypłynęły przez zawór w bocznej ścianie w pierwszej sekundzie 4 l wody, a w każdej następnej ubywa o 0,2 l mniej niż w poprzedniej. Jednocześnie do drugiego kotła wlało się z kranu w pierwszej sekundzie 1,5 l wody, a w każdej następnej przybywa o 0,5 l więcej niż w poprzedniej. Po ilu sekundach poziomy wody w obu tych naczyniach wyrównają się, jeżeli pole dna pierwszego kotła jest 1,5 razy większe niż drugiego?
6. Pola kwadratowych kartek papieru różnej wielkości tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 12 cm^2, piątym zaś 30 cm^2. Kartki te pocięto na kawałki, z których ułożono kwadrat o polu 2,1 dm^2. Ile było tych kartek?
7. Miary kątów pewnego dziewięciokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z nich ma miarę 108°. Oblicz miarę największego z kątów tego dziewięciokąta oraz różnicę miedzy miarami jego kolejnych kątów.
8. Miary kątów pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z nich ma miarę 119°, a największy 169°. Ile boków ma ten wielokąt?
9. Miary kątów pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 6°. Najmniejszy z nich ma miarę 114°. Ile boków może mieć ten wielokąt?
10. Z beczki pełnej wody w pierwszej sekundzie wylało się 3,4 l wody, a w każdej następnej o 0,3 l mniej niż w poprzedniej, przy czym w ostatniej sekundzie wylało się już tylko 0,1 l wody. Ile sekund wylewała się woda z tej beczki? Ile w niej było wody?

6. Ciąg geometryczny i jego własności

Pewna legenda głosi, że bramin (członek najwyższej kasty kapłańskiej), który wynalazł szachy, zażądał od króla perskiego tyle ziaren pszenicy, aby mógł pokryć nimi całą szachownicę (ryc. 4.1). Zaczął od jednego ziarna na pierwszym polu, potem położył dwa na sąsiednim, potem na następnym dwa razy więcej niż na poprzednim polu, i tak aż do ostatniego. Okazało się, że nie tylko spichrze szacha perskiego, ale wszystkie spichrze na świecie nie mają razem tyle pszenicy. Oblicz, ile ziaren pszenicy zażądał bramin od króla perskiego.



Ryc. 4.1.

Liczby ziaren, jakie musiałby kłaść król perski na kolejnych polach szachownicy, tworzą ciąg:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{62}, 2^{63}.$$

Sumę tych liczb możemy obliczyć, korzystając na przykład z jednego z poznanych w klasie pierwszej wzorów skróconego mnożenia:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Naszym zadaniem jest obliczyć sumę:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Zgodnie z podanym wzorem:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} = (2-1)\left(2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 1\right) =$$

$$= 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Tyle anegdota. Powróćmy do wspomnianego ciągu: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$. Ma on tę ciekawą własność, że każdy jego wyraz (począwszy od drugiego) jest iloczynem wyrazu poprzedniego i liczby 2.

Podobnie, jeśli przyjrzymy się ciągom:

$$-\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81, \ldots;$$

$$5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \ldots;$$

$$4, 4, 4, 4, \ldots,$$

to zauważymy, że w każdym z nich wszystkie wyrazy (poczynając od drugiego) są iloczynami wyrazu poprzedniego i pewnej tej samej liczby; w pierwszym ciągu ową liczbą jest –3, w drugim –5, zaś w trzecim 1. Ciągi liczbowe o powyższej własności nazywamy ciągami geometrycznymi.

> Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wyraz, oprócz wyrazu pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i tej samej pewnej liczby q.

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu geometrycznego.

Uwaga. Ciąg geometryczny może być nieskończony albo skończony, przy czym skończony ciąg musi być co najmniej trójwyrazowy.

Zgodnie z podaną definicją ciąg $(0, 0, 0, \ldots)$ jest geometryczny – jego ilorazem jest dowolna liczba rzeczywista. Aby ciąg geometryczny miał tylko jeden iloraz, trzeba założyć, by jego pierwszy wyraz był różny od zera. Na przykład, gdy $a \neq 0$, to ciągi $(a, 0, 0, \ldots)$, $(a, a, a, \ldots)$, $(a, -a, a, -a, \ldots)$ są geometryczne o ilorazach równych odpowiednio 0, 1 i –1.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od zera, to możemy też mówić, że ciąg (a_n) jest geometryczny, gdy stosunek dowolnego jego wyrazu (oprócz wyrazu pierwszego) do wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego jest stały.

Zatem, gdy wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od zera, ciąg (a_n) jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka różna od zera liczba rzeczywista q, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n (gdy ciąg ten jest nieskończony) lub dla każdej dodatniej liczby naturalnej n takiej, że $n \leqslant k - 1$ (gdy ciąg ten jest skończony, k-wyrazowy) spełniony jest warunek $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Aby wyznaczyć ciąg geometryczny, należy znaleźć jego pierwszy wyraz i iloraz. Jeśli znamy te dwie liczby, znajdziemy kolejne wyrazy ciągu.

Spójrzmy teraz na kilka przykładów ciągów geometrycznych, obok których zamieszczono ich pierwszy wyraz i iloraz:

$(-3, 6, -12, 24, \ldots)$, $a_1 = -3$, $q = -2$;

$\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$, $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$;

$(2, -2, 2, -2, \ldots)$, $a_1 = 2$, $q = -1$;

$(-2, -2, -2, \ldots)$, $a_1 = -2$, $q = 1$.

Jeżeli ciąg (a_n) jest geometryczny o ilorazie q, to zgodnie z definicją:

$a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, $a_4 = a_3 q = a_1 q^3$ itd.

Twierdzenie

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$, to dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Jest to wzór na ogólny wyraz ciągu geometrycznego.

▢ Dowód twierdzenia**. Zastosujemy indukcję matematyczną:

1. Dla $n = 1$ podany wzór zachodzi, gdyż dla $q \neq 0$ równość $a_1 = a_1 q^0$ jest prawdziwa.
2. Dowodzimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli $a_n = a_1 q^{n-1}$, to $a_{n+1} = a_1 q^n$. Istotnie, na mocy definicji ciągu geometrycznego i założenia indukcyjnego $a_{n+1} = a_n q = a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n$.

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że podany wzór zachodzi dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. ▢

Przykład 1. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$, $q = 3$. Oblicz a_5 i a_7.
Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na n-ty wyraz ciągu geometrycznego obliczamy:
$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162,$
$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458.$

Odpowiedź: W danym ciągu geometrycznym $a_5 = 162$, $a_7 = 1458$.

Przykład 2. Wyznacz ciąg geometryczny, wiedząc, że $a_9 = 3$ i $a_4 = -3$.
Rozwiązanie:

Mamy $a_9 = a_1 \cdot q^8$ i $a_4 = a_1 q^3$. Wobec tego $a_1 q^8 = 3$ i $a_1 q^3 = -3$; stąd $q^5 = -1$ i wreszcie $q = -1$. Po podstawieniu tych danych do pierwszej równości otrzymujemy $a_1 = 3$.

Odpowiedź: W danym ciągu geometrycznym $a_1 = 3$, $q = -1$.

Przykład 3. Wyznacz ciąg geometryczny, w którym $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ i $a_3 - a_1 = 3$.
Rozwiązanie:

Układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 21 \\ a_3 - a_1 = 3 \end{cases}$$

jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 = 21 \\ a_1 q^2 - a_1 = 3, \end{cases}$$

a ten kolejno układom równań:

$$\begin{cases} a_1\left(1 + q^2 + q^4\right) = 21 \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q^2 - 1}{1 + q^2 + q^4} = \dfrac{1}{7} \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^4 - 6q^2 + 8 = 0 \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(q^2 - 2\right)\left(q^2 - 4\right) = 0 \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} q^2 = 2 \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} q^2 = 4 \\ a_1\left(q^2 - 1\right) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q^2 = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 1 \\ q^2 = 4 \end{cases}$$

i ostatecznie:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \sqrt{2}, \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -2, \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2, \end{cases}$$

Odpowiedź: Istnieją cztery ciągi geometryczne spełniające warunki zadania. Są to ciągi wyznaczone przez pary:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2. \end{cases}$$

Poniżej przedstawimy następną własność ciągu geometrycznego:

Twierdzenie

W każdym ciągu geometrycznym kwadrat dowolnego jego wyrazu – oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) – jest iloczynem dwóch wyrazów sąsiednich: poprzedniego i następnego.

☐ Dowód. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $n \geqslant 2$ (i $n \leqslant k-1$, gdy ciąg jest k-wyrazowy) $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)^2 = a_n^2$, co dowodzi tezy. ☐

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek dla ciągów geometrycznych o wyrazach dodatnich:

Wniosek. W każdym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich dowolny jego wyraz – oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) – jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego. Znaczy to, że jeśli ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest geometryczny, to $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ dla każdej liczby naturalnej n, takiej, że $n \geqslant 2$ (i $n \leqslant k-1$, gdy ciąg jest k-wyrazowy).

Przykład 4. Między liczby 32 i 500 wstaw takie liczby x i y, aby ciąg $(32, x, y, 500)$ był geometryczny.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że ciąg $(32, x, y, 500)$ jest geometryczny. Wówczas liczby x i y spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 32y \\ y^2 = 500x. \end{cases}$$

Po równoważnym przekształceniu tego układu otrzymujemy kolejno układy:

$$\begin{cases} x^2 = 32y \\ x^2 y^2 = 16000xy, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 2^5 y \\ (xy)^2 = 2^7 \cdot 5^3 xy, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 2^5 \cdot y \\ xy = 2^7 \cdot 5^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 = 2^5 \cdot xy \\ xy = 2^7 \cdot 5^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = 2^5 \cdot 2^7 \cdot 5^3 \\ xy = 2^7 \cdot 5^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = \left(2^4 \cdot 5\right)^3 \\ xy = 2^7 \cdot 5^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2^4 \cdot 5 \\ 2^4 \cdot 5 \cdot y = 2^7 \cdot 5^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2^4 \cdot 5 \\ y = 2^3 \cdot 5^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 80 \\ y = 200. \end{cases}$$

Ciąg $(32, 80, 200, 500)$ jest geometryczny, o czym możemy się przekonać, sprawdzając go.
Odpowiedź: Dany ciąg jest geometryczny dla $x = 80$, $y = 200$.

Przez S_n, jak pamiętamy, oznaczyliśmy sumę n początkowych wyrazów dowolnego ciągu liczbowego (a_n):

$S_1 = a,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

....

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$

Twierdzenie

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to sumę S_n jego n początkowych wyrazów można wyrazić wzorem:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & \text{gdy } q = 1, \\ a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1. \end{cases}$$

□ Dowód. Gdy $q = 1$, to ciąg geometryczny (a_n) jest stały i sumę jego n początkowych wyrazów obliczamy za pomocą wzoru $S_n = na_1$.

Niech $q \neq 1$. Wtedy, korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, możemy sumę $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ zapisać następująco:

(1) $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$

Mnożymy obustronnie równość (1) przez q:

(2) $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$

Odejmujemy równości (1) i (2) stronami:

$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$, skąd otrzymujemy:

$(1-q)S_n = a_1 \cdot (1-q^n)$ i ostatecznie:

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}.$ □

Przykład 5. Oblicz sumę 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 2, q = 3.$

Rozwiązanie:

Korzystamy z poznanego wzoru:

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 2 \cdot \frac{3^{10}-1}{2} = 3^{10} - 1.$$

Odpowiedź: Suma ta wynosi $3^{10} - 1$.

Przykład 6. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 + a_5 = 51$ i $a_2 + a_6 = 102$.
Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, by otrzymać 3069?
Rozwiązanie:
Niech q będzie ilorazem tego ciągu. Wówczas z treści zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^4 = 51 \\ a_1 q + a_1 q^5 = 102, \end{cases}$$

który jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} a_1\left(1+q^4\right) = 51 \\ a_1 q\left(1+q^4\right) = 102, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1\left(1+q^4\right) = 51 \\ 51q = 102, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\cdot\left(1+2^4\right) = 51 \\ q = 2 \end{cases} \text{ i ostatecznie } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2. \end{cases}$$

Załóżmy, że dodaliśmy n początkowych wyrazów tego ciągu. Wobec tego ze wzoru na S_n:

$3\cdot\dfrac{1-2^n}{1-2} = 3069$, skąd $2^n - 1 = 1023$, czyli $2^n = 1024$ i ostatecznie $n = 10$.

Odpowiedź: Należy dodać 10 początkowych wyrazów tego ciągu.

Przykład 7*. Udowodnij, że suma odwrotności wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa sumie wszystkich jego wyrazów podzielonej przez iloczyn pierwszego i ostatniego wyrazu.
Rozwiązanie:
Jeżeli $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to oczywiście musi być $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$ i wówczas:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \ldots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{a_1}\cdot\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1}{a_1 q^{n-1}} =$$

$$= \frac{a_1 q^{n-1} + a_1 q^{n-2} + \ldots + a_1 q + a_1}{a_1\cdot a_1 q^{n-1}} = \frac{S_n}{a_1\cdot a_n}.$$

Przykład 8*. Niech S_n, S_{2n} i S_{3n} są odpowiednio sumami n, $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego (a_n). Wykaż, że:

$$S_n\cdot\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = \left(S_{2n} - S_n\right)^2.$$

Rozwiązanie:
Jeżeli ciąg ten jest stały, to:

$$S_n\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = na_1\left(3na_1 - 2na_1\right) = \left(na_1\right)^2 = \left(2na_1 - na_1\right)^2 = \left(S_{2n} - S_n\right)^2.$$

Gdy zaś ciąg ten nie jest stały, wówczas jego iloraz $q \neq 1$ i wtedy:

$$S_n\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\left(a_1 \cdot \frac{1-q^{3n}}{1-q} - a_1 \cdot \frac{1-q^{2n}}{1-q}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \left[\left(1-q^n\right)\left(1-q^{3n}\right) - \left(1-q^n\right)\left(1-q^{2n}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \left(1 - q^{3n} - q^n + q^{4n} - 1 + q^{2n} + q^n - q^{3n}\right) = \left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \left(q^{4n} + q^{2n} - 2q^{3n}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2 \cdot q^{2n}\left(1-q^n\right)^2 = \left(\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n\left(1-q^n\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1}{1-q}\left(q^n - q^{2n}\right)\right)^2 = \left(\frac{a_1}{1-q}\left(\left(1-q^{2n}\right) - \left(1-q^n\right)\right)\right)^2 =$$

$$= \left(a_1 \cdot \frac{1-q^{2n}}{1-q} - a_1 \frac{1-q^n}{1-q}\right)^2 = \left(S_{2n} - S_n\right)^2.$$

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg geometryczny? Podaj przykłady.
2. Podaj wzór na:

   a) n-ty wyraz ciągu geometrycznego,

   b) sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.
3. Wyznacz ciąg geometryczny $\left(a_n\right)$, w którym:

   a) $a_2 = 4,\ a_5 = 4000;$ b) $a_2 = 2,\ S_3 = 7;$ c) $q = 3,\ S_5 = 121.$
4. Dla jakiej dodatniej liczby x ciąg $(25, x, 100)$ jest geometryczny?
5. W ciągu geometrycznym $\left(a_n\right)$ dane są: $q = 3$ i $S_5 = 363$. Znajdź a_1.
6. Ciąg geometryczny ma parzystą liczbę wyrazów. Suma wyrazów o wskaźnikach parzystych wynosi 12, a suma wyrazów o wskaźnikach nieparzystych wynosi 24. Znajdź iloraz tego ciągu.
7. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą ciąg geometryczny. Wyraź sumę $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n$ w zależności od a_1 i q.

8*. Oblicz sumę $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

7. Monotoniczność ciągu geometrycznego

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$. Wówczas dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi wzór $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Korzystając z tego wzoru, rozstrzygniemy, czy i kiedy ciąg geometryczny jest monotoniczny. Przyjmijmy jeszcze, że $a_1 \neq 0$ (gdy $a_1 = 0$, to ciąg jest stale równy zeru). Wówczas wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od zera. Rozpatrzmy cztery przypadki ze względu na wartość q.

Przypadek 1. Jeśli $q < 0$.

Wówczas wyrazy ciągu (a_n) na przemian zmieniają znak. Gdy $a_1 > 0$, wszystkie wyrazy ciągu o indeksach nieparzystych są dodatnie, wszystkie zaś wyrazy ciągu o indeksach parzystych są ujemne. Gdy $a_1 < 0$, zachodzi sytuacja odwrotna.

Mówimy, że ciąg ten w tym przypadku jest naprzemienny. Nie jest zatem monotoniczny (czyli... ani rosnący, ani malejący).

Przypadek 2. Jeśli $q = 1$.

Wówczas ciąg (a_n) jest stały, bo wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Przypadek 3. Jeśli $0 < q < 1$.

Wtedy wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są:

– dodatnie, gdy $a_1 > 0$;

– ujemne, gdy $a_1 < 0$.

Zatem dla każdej dodatniej liczby naturalnej n:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, skąd $a_{n+1} < a_n$, gdy $a_1 > 0$, zaś $a_{n+1} > a_n$, gdy $a_1 < 0$.

Oznacza to, że ciąg (a_n) jest malejący, gdy $a_1 > 0$, natomiast rosnący, gdy $a_1 < 0$.

Przypadek 4. Jeśli $q > 1$.

Przypadek ten rozpatrujemy podobnie i wnioskujemy, że ciąg (a_n) jest:

– rosnący, gdy $a_1 > 0$;

– malejący, gdy $a_1 < 0$.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Ciąg geometryczny (a_n) jest:

– rosnący, gdy $a_1 > 0$ i $q > 1$ lub $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$;

– malejący, gdy $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ lub $a_1 < 0$ i $q > 1$;

– stały, gdy $a_1 = 0$ lub $a_1 \neq 0$ i $q = 1$.

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie $q < 0$ nie jest monotoniczny.

Pytania i zadania

1. Omów monotoniczność ciągu geometrycznego.
2. Które z podanych niżej ciągów geometrycznych są rosnące, które malejące, a które nie są monotoniczne:

   a) $a_1 = 2, q = \frac{1}{2}$; b) $a_1 = -2, q = \frac{1}{2}$; c) $a_1 = 2, q = -\frac{1}{2}$;

   d) $a_1 = 1, q = 2$; e) $a_1 = 1, q = -2$; f) $a_1 = 1, q = -1$?
3. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $S_{2n} = 63$, $S_{3n} = 511$. Wyznacz S_n.
4. Liczby a i b są pierwiastkami równania $x^2 - 3x + A = 0$, zaś liczby c i d są pierwiastkami równania $x^2 - 12x + B = 0$. Wyznacz A i B, wiedząc, że (a, b, c, d) jest rosnącym ciągiem geometrycznym.
5. Rosnące ciągi arytmetyczny i geometryczny o pierwszym wspólnym wyrazie równym 9 mają jeszcze wspólny trzeci wyraz. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 2 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznacz te ciągi.

8. Ciąg geometryczny w zadaniach

Podrozdział ten poświęcimy zadaniom, których treść dotyczy różnych dziedzin życia.

Przykład 1. Pewnej firmie zlecono wykopanie studni o głębokości 30 m. Za wykopanie pierwszego metra proponowano 54 zł, a za każdy następny metr o 5 zł 75 gr więcej niż za poprzedni. Firma jednak nie przystała na te warunki i zaproponowała, aby za pierwszy metr zapłacono jej 1 grosz, a za każdy następny dwa razy więcej niż za poprzedni. Zleceniodawca chętnie na to przystał. Czy jednak opłaciła się mu nowa umowa?
Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że koszty wykopu kolejnych metrów głębokości według pierwotnej umowy tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 54$ i różnicy $r = 5{,}75$ (w złotych).

Wobec tego $a_{30} = 54 + (30 - 1) \cdot 5{,}75 = 220{,}75$, zaś $S_{30} = \frac{54 + 220{,}75}{2} \cdot 30 = 4125{,}25$.

Zleceniodawca przystał jednak na propozycję firmy, według której koszty kolejnych metrów głębokości tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 0{,}01$ i ilorazie $q = 2$. Stąd już na przykład $a_{20} = 0{,}01 \cdot 2^{19} = 0{,}01 \cdot 2^{10} \cdot 2^9 = 10{,}24 \cdot 512 = 5242{,}88$ i widzimy, że koszt wykopania 20 m głębokości tej studni przekracza koszt wykopania całej studni przy pierwotnej umowie.
Odpowiedź: Zleceniodawcy stanowczo nie opłaciła się zmiana warunków umowy.

Przykład 2. Cienką bibułkę o grubości $\frac{1}{16}$ mm składamy na pół, potem znowu na pół, jeszcze raz na pół itd. Oblicz, jaka będzie grubość bibułki złożonej w ten sposób 50 razy, zakładając, że udałoby się nam to uczynić?
Rozwiązanie:

Początkowa grubość razem z grubościami po kolejnych złożeniach tej bibułki tworzą 51-wyrazowy ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{16}$ i ilorazie $q = 2$. Chcemy obliczyć grubość po 50-tym złożeniu tej bibułki, która jest 51. wyrazem tego ciągu. Zatem $a_{51} = \frac{1}{16} \cdot 2^{50} = 2^{46}$ mm ≈ 64 mln km. Oznaczałoby to, że końcowa grubość złożonej 50 razy bibułki byłaby ponad 160 razy większa niż odległość Ziemi od Księżyca!

Przykład 3. Bartek podzielił się pewną sensacyjną wiadomością z trzema kolegami w ciągu jednej godziny. Zakładając, że każda z powiadomionych osób w ciągu kolejnej godziny poda tę wiadomość trzem osobom, które jej jeszcze nie znały, oblicz w przybliżeniu, po jakim czasie liczba osób znających tę wiadomość przekroczy 250000.
Rozwiązanie:

Liczby powiadamianych kolejno osób tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 3$. Załóżmy, że liczba osób, które poznały sensacyjną wiadomość, przekroczy 250000 po n godzinach. Należy znaleźć takie n, aby $S_n > 250000$.

$S_n = 1 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$, więc:

$S_n > 250000 \iff \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) > 250000 \iff 3^n - 1 > 500000 \iff n > 11$, bo:

$3^{11} = 477147$, zaś $3^{12} = 531441$.

Odpowiedź: Po więcej niż 11 godzinach.

Przykład 4. W pewnym konkursie przyznano kilka nagród za łączną sumę 1476 zł. Pierwsza nagroda była w wysokości 500 zł, a każda następna stanowiła pewien stały ułamek poprzedniej. Ile przyznano nagród w tym konkursie i jakiej były one wysokości, jeśli ostatnia nagroda wyniosła 256 zł?
Rozwiązanie:

Wysokości nagród w tym konkursie tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 500, a ostatnim równym 256. Suma wyrazów tego ciągu wynosi 1476. Nie wiemy natomiast, ile tych nagród przyznano, więc załóżmy, że n. Ze wzoru na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} 500q^{n-1} = 256 \\ 500 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1476. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu go otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} q^{n-1} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 \\ \dfrac{q^n - 1}{q-1} = \dfrac{369}{125}, \end{cases} \qquad \begin{cases} q^n = \dfrac{64}{125}q \\ \dfrac{64}{125}q - 1 = \dfrac{369(q-1)}{125}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^{n-1} = \dfrac{64}{125} \\ \dfrac{369-64}{125}q = \dfrac{369}{125} - 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} q^{n-1} = \dfrac{64}{125} \\ 305q = 244, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^{n-1} = \dfrac{64}{125} \\ q = \dfrac{4}{5}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{3} \\ q = \dfrac{4}{5}, \end{cases} \qquad \begin{cases} n - 1 = 3 \\ q = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

i ostatecznie $n = 4$ i $q = \frac{4}{5}$.

Skoro $a_1 = 500$, to $a_2 = 500 \cdot \frac{4}{5} = 400$, $a_3 = 400 \cdot \frac{4}{5} = 320$.

Odpowiedź: W konkursie tym przyznano cztery nagrody, w wysokości odpowiednio: 500 zł, 400 zł, 320 zł i 256 zł.

Pytania i zadania

1. Z dwóch punktów A i B odległych od siebie o $111\frac{1}{5}$ m wyruszają jednocześnie dwa ciała. Pierwsze z nich przebyło w pierwszej sekundzie 30 m, a w każdej następnej o 1 m więcej niż w poprzedniej. Drugie przebyło w pierwszej sekundzie 5 m, a w każdej następnej $p\%$ tego, co w poprzedniej. Oblicz p, wiedząc, że ciała spotkają się po trzech sekundach.
2. Obrót każdej z dwóch założonych jednocześnie firm wyniósł w pierwszym miesiącu 50000 zł. Po 5 miesiącach okazało się, że obrót pierwszej z tych firm rósł z miesiąca na miesiąc w ciągu arytmetycznym, natomiast obrót drugiej w ciągu geometrycznym, przy czym zarówno w drugim, jak i w trzecim miesiącu obrót pierwszej firmy był o 2000 zł wyższy niż drugiej. Która z tych firm miała większą sumę obrotu w okresie tych 5 miesięcy i o ile?
3. Wykopano studnię o głębokości 10 m. Za pierwszy metr zapłacono p zł, a za każdy następny metr zapłacono dwukrotnie więcej niż za metr poprzedni. Oblicz koszt wykopania tej studni.
4. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 61 zł. Za pierwszą i drugą zapłacono razem o 11 zł więcej niż za trzecią. Ile zapłacono za każdą książkę?
5. Piłka, odbiwszy się od ziemi, osiąga za każdym razem wysokość stanowiącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32 cm?
6. W styczniu absencja w pewnym zakładzie pracy wyniosła 1,3% czasu pracy. W każdym następnym miesiącu absencja malała 1,1 razy. Przyjmując dla uproszczenia taką samą liczbę dni roboczych w każdym miesiącu, oblicz absencję w tym zakładzie w grudniu tego roku i średnią absencję w tym zakładzie w ciągu całego roku.
7. W pewnej rakiecie zużycie paliwa podczas startu maleje tak, że liczby ton zużytego paliwa w kolejnych sekundach lotu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{3}$. Oblicz, ile paliwa rakieta zużywa podczas startu, jeśli w pierwszej sekundzie zużyła 3 t, a start trwał 10 s.

9. Procent składany. Obliczenia związane z oprocentowaniem lokat i kredytów

Procentem składanym nazywamy sposób oprocentowania lokaty pieniężnej, polegający na tym, że do złożonego kapitału dolicza się odsetki od niego i oprocentowuje się w następnym okresie. Doliczenie odsetek do lokaty to **kapitalizacja odsetek**, a okres, po którym się jej dokonuje, zwie się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 1. Bartek na początku roku wpłacił do banku 4000 zł. Oprocentowanie w tym banku wynosi 8% w stosunku rocznym. Bank dolicza odsetki do oprocentowanej kwoty co kwartał. Ile pieniędzy będzie na koncie Bartka pod koniec roku, a ile po 2 latach?
Rozwiązanie:

W ciągu roku są cztery okresy kapitalizacji, po których do oprocentowanej kwoty doliczane są odsetki. Po każdym okresie kapitalizacji kwota na rachunku zwiększa się o $\frac{1}{4} \cdot 8\% = 2\%$. Wobec tego na rachunku Bartka znajdzie się:

– po trzech miesiącach $4000 \cdot 1{,}02 = 4080$ (zł);

– po sześciu miesiącach $4000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 4000 \cdot (1{,}02)^2 = 4161{,}60$ (zł);

– po dziewięciu miesiącach $4000 \cdot (1{,}02)^2 \cdot 1{,}02 = 4000 \cdot (1{,}02)^3 \approx 4244{,}83$ (zł);

– po roku $4000 \cdot (1{,}02)^3 \cdot 1{,}02 = 4000 \cdot (1{,}02)^4 \approx 4329{,}73$ (zł).

Widzimy więc, że kwoty po kolejnych okresach kapitalizacji tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = 1{,}02$, zwanym czynnikiem procentowym. Po n okresach kapitalizacji na rachunku będzie kwota $4000 \cdot (1{,}02)^n$. Ponieważ 2 lata to 8 okresów kapitalizacji, więc po upływie 2 lat Bartek będzie miał na swym koncie $4000 \cdot (1{,}02)^8 \approx 4686{,}63$ (zł).
Odpowiedź: Bartek będzie miał na swym koncie po roku 4329,73 zł, a po dwóch latach 4686,63 zł.

Jeżeli wpłacimy do banku a zł, w którym oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi $p\%$, a w ciągu roku jest k okresów kapitalizacji, to po n latach na naszym koncie będzie:

$$(*)\ a \cdot \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^{n \cdot k} \text{ złotych.}$$

Przykład 2. Tomek złożył w banku 5000 zł. Po 18 miesiącach bank mu wypłacił 5624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie (w skali roku) w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?
Rozwiązanie:

Oznaczmy nieznane nam oprocentowanie w tym banku (w skali roku) przez p. Po podstawieniu występujących tutaj danych do wzoru $(*)$ otrzymujemy równanie:

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{p}{200}\right)^3 = 5624{,}32, \text{ skąd:}$$

$$\left(1 + \frac{p}{200}\right)^3 = 1{,}124864,$$

$$1 + \frac{p}{200} = \sqrt[3]{1{,}124864},$$

$$1 + \frac{p}{200} = 1{,}04,$$

$$\frac{p}{200} = 0{,}04,$$

$$p = 8.$$

Odpowiedź: Oprocentowanie to wynosi 8%.

Pytania i zadania

1. Co to jest:
   a) procent składany,
   b) kapitalizacja odsetek,
   c) okres kapitalizacji?
2. Jaką kwotę należy wpłacić do banku, w którym oprocentowanie w skali roku wynosi 10%, a odsetki kapitalizowane są co pół roku, by po trzech latach odebrać 30000 zł?
3. Która z lokat terminowych jest korzystniejsza: 10-letnia z oprocentowaniem wynoszącym 4% w skali roku czy 4-letnia z oprocentowaniem wynoszącym 10%, zakładając, że kapitalizacja odsetek w każdym przypadku następuje co rok?
4. W dniu urodzin syna ojciec wpłacił do banku 10000 zł, tak aby na 21. urodziny syn mógł odebrać 35000 zł. Oprocentowanie w banku przez pierwsze 12 lat wynosiło 7% (w skali roku), a następnie zostało obniżone do 5,5% i już nie uległo zmianie. Kapitalizacja odsetek następuje co rok. Czy plan ojca się powiódł?
5. W dniu urodzin córki ojciec wpłacił dla niej do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło w tym banku 8%, ale po 10 latach bank obniżył je do 6%. Po 20 latach córka mogła wypłacić ze swojego konta 30930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu urodzin córki? Kapitalizacja odsetek następowała co rok.
6. Na zakup samochodu Piotr wziął z banku kredyt w wysokości 40000 zł. Oprocentowanie kredytu samochodowego w tym banku wynosi 4% w stosunku rocznym, a kapitalizacja należnych bankowi odsetek następuje co pół roku. Kredyt zaciągnięty został na okres 3 lat. Ile pieniędzy (wraz z odsetkami) zapłaci bankowi Piotr po upływie tych 3 lat?
7. Jaki kapitał należy wpłacić do banku na początku roku, aby w końcu każdego z n kolejnych lat bank wypłacał rentę po r złotych? Oprocentowanie w banku wynosi p%, a kapitalizacja odsetek następuje raz na rok.
   Uwaga. Renta to jednakowa suma wypłacana w stałych terminach przez ustaloną liczbę kolejnych lat. Osoba utrzymująca się z takiej renty nazywa się rentierem.

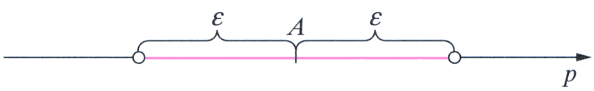
8. Wujek ufundował swojej bratanicy stypendium na okres jej pięcioletnich studiów. Wpłacił 20000 zł do banku, w którym kapitalizacja odsetek w wysokości 8% w skali roku następuje co kwartał. Pierwsza wypłata stypendium ma nastąpić po trzech miesiącach od wpłaty pieniędzy przez wujka, a kolejne co trzy miesiące. Jak wysokich wypłat może spodziewać się bratanica?
9. W pewnym banku oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 12%, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Wpłacono na konto 1000 zł. Jaką kwotę wypłacił bank po 3 latach oszczędzania?
10. Wpłacono do banku kwotę 5000 zł. Oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 20%, a kapitalizacja odsetek następuje po roku. Po ilu latach kwota wzrośnie do 7200 zł?
11. W pewnym banku oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 8%, a kapitalizacja odsetek następuje co pół roku. Po ilu miesiącach odbierzemy z banku kwotę 5624,32 zł, jeżeli na początku okresu oszczędzania wynosiła ona 5000 zł?
12. Na jaki procent wpłacono do banku 10000 zł, jeżeli po 2 latach oszczędzania kwota ta wynosi 15625, a kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

10. Pojęcie granicy ciągu nieskończonego – wprowadzenie

Zajmiemy się teraz ciągami nieskończonymi. Zbadamy, jak się one zachowują, gdy ich argument rośnie nieograniczenie. Przedtem jednak wprowadzimy najważniejsze pojęcia.

Otoczenie punktu na prostej

Otoczeniem o promieniu długości ε **punktu** A **na prostej** p nazywamy odcinek otwarty tej prostej o środku A i długości 2ε (ryc. 4.2).

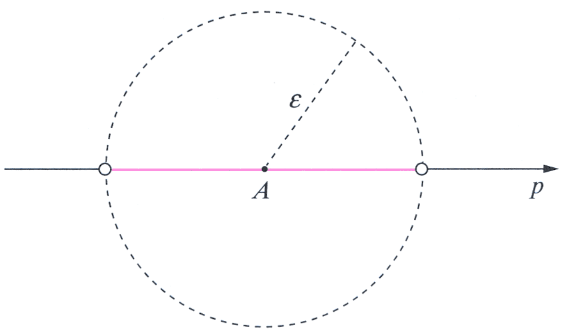


Ryc. 4.2.

Odcinek ten jest wspólną częścią prostej p i wnętrza koła o środku A i promieniu długości ε (ryc. 4.3).

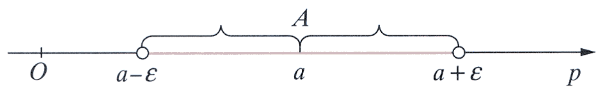
Otoczenie o promieniu długości ε punktu A na prostej oznaczać będziemy symbolem $U(A;\varepsilon)$.

Przenieśmy teraz nasze rozważania na oś liczbową, gdzie punkty utożsamiamy z liczbami, które są ich współrzędnymi na tej osi. Zatem zamiast „otoczenie punktu" będziemy mówić „otoczenie liczby", która jest współrzędną tego punktu na danej osi.



Ryc. 4.3.

Zatem: otoczeniem $U(a; \varepsilon)$ liczby a o promieniu $\varepsilon > 0$ na osi liczbowej jest przedział $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (ryc. 4.4).



Ryc. 4.4.

Na przykład:
- otoczeniem o promieniu 2 liczby 1 jest przedział $(-1; 3)$,
- otoczeniem o promieniu 1 liczby 2 jest przedział $(1; 3)$,
- otoczeniem o promieniu 3 liczby –1 jest przedział $(-4; 2)$,
- otoczeniem o promieniu $\frac{1}{2}$ liczby 0 jest przedział $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Każda liczba rzeczywista x należy więc do otoczenia $U(a; \varepsilon)$, czyli do przedziału $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówności:

$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$,

$-\varepsilon < x - a < \varepsilon$,

$|x - a| < \varepsilon$.

„Prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego"

Używany w matematyce zwrot **„prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego"** oznacza: wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego z wyjątkiem skończonej ich liczby. W szczególności mogą to być wszystkie wyrazy ciągu.

Zatem, prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) mają pewną własność, gdy własność tę mają wszystkie wyrazy tego ciągu o numerach, poczynając od pewnego n.

Przykład 1. Prawie wszystkie wyrazy ciągu $(2n)$ są większe od 1000 (lub jeszcze prościej: prawie wszystkie liczby naturalne parzyste są większe od 1000), gdyż są nimi wszystkie liczby parzyste, poczynając od 502, bowiem: $2n > 1000 \iff n > 500$.

Liczbami naturalnymi parzystymi nie większymi od 1000 są liczby: 0, 2, 4, 6, 8, …, 1000 i jest ich skończenie wiele.

Przykład 2. Prawie wszystkie wyrazy ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)$ są mniejsze od $\frac{1}{10}$, bowiem $\frac{1}{n} < \frac{1}{10} \iff n > 10$. Są więc nimi wszystkie wyrazy tego ciągu, począwszy od $\frac{1}{11}$, czyli $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \ldots$, a nie są nimi: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$.

Przykład 3. Które wyrazy ciągu $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ należą do otoczenia o promieniu $\frac{1}{100}$ liczby $\frac{1}{2}$?
Rozwiązanie:

Otoczeniem o promieniu $\frac{1}{100}$ liczby $\frac{1}{2}$ jest, jak wiemy, przedział $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right)$.
Zatem:

$$\frac{n}{2n+1} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \iff$$

$$\iff -\frac{1}{100} < \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} < \frac{1}{100} \iff \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}.$$

Ponieważ:

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)},\text{ więc:}$$

$$\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}\iff\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{100}\iff 2(2n+1)>100\iff$$

$$\iff 2n+1>50\iff 2n>49\iff n>\frac{49}{2}.$$

Najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą nierówność $n>\frac{49}{2}$ jest $n=25$.

Wyrazami ciągu $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$, należącymi do $U\left(\frac{1}{2};\frac{1}{100}\right)$, są wyrazy o numerze n nie mniejszym od 25.

Odpowiedź: Do otoczenia o promieniu $\frac{1}{100}$ liczby $\frac{1}{2}$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

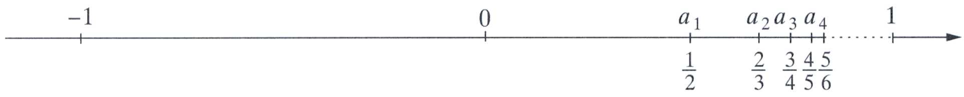
Pytania i zadania

1. Co to jest:
   a) otoczenie o promieniu ε punktu A na prostej;
   b) otoczenie o promieniu ε liczby a na osi liczbowej?
2. Zaznacz na osi liczbowej:
   a) $U(3;5)$; b) $U(4;1)$; c) $U(-3;5)$; d) $U(0;3)$; e) $U\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.
3. Co oznacza zwrot: „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”? Zilustruj go przykładami.
4. Rozstrzygnij:
   a) czy wszystkie liczby naturalne większe od 2003 to prawie wszystkie liczby naturalne;
   b) czy wszystkie liczby naturalne podzielne przez 3 to prawie wszystkie liczby naturalne;
   c) czy wszystkie liczby naturalne złożone to prawie wszystkie liczby naturalne;
   d) czy wszystkie liczby pierwsze nieparzyste to prawie wszystkie liczby pierwsze.
5. Rozstrzygnij, czy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do $U(a;\varepsilon)$, gdy:
   a) $a_n=\frac{n-1}{n}$, $a=1$, $\varepsilon=0{,}01$;
   b) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $a=0$, $\varepsilon=0{,}01$;
   c) $a_n=\frac{2n-1}{n+1}$, $a=2$, $\varepsilon=0{,}001$;
   d) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$, $a=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=0{,}01$.

11. Granica ciągu nieskończonego. Własności ciągów zbieżnych

Rozważmy ciąg nieskończony (a_n) określony wzorem $a_n=\frac{n}{n+1}$. Początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\ldots$.

Zaznaczmy punkty odpowiadające tym wyrazom na osi liczbowej (ryc. 4.5).



Ryc. 4.5.

Widzimy, że wyrazy tego ciągu skupiają się przy liczbie 1. Dotychczas oznaczało to dla nas, że do dowolnego otoczenia liczby 1 należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Rzeczywiście:

– do otoczenia liczby 1 o promieniu 0,1 należą wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach n takich, że $n > 9$, gdyż $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10} \iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \iff n+1 > 10 \iff n > 9$;

– do otoczenia liczby 1 o promieniu 0,03 należą wszystkie wyrazy tego ciągu o numerach n takich, że $n > \frac{97}{3}$, bo $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{3}{100} \iff \frac{1}{n+1} < \frac{3}{100} \iff 3n+3 > 100 \iff n > \frac{97}{3}$;

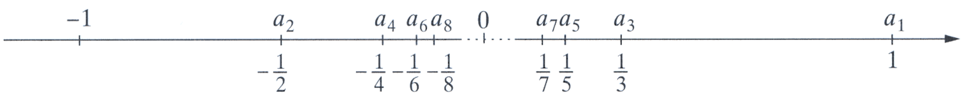
i ogólnie:

– w otoczeniu liczby 1 o dowolnym promieniu ε znajdują się wszystkie wyrazy rozważanego ciągu o numerach n takich, że $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, gdyż:

$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Tak więc do dowolnego otoczenia liczby 1 należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n).

Rozważmy teraz ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Jego początkowymi wyrazami są liczby: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$, które na osi liczbowej skupiają się wokół zera (ryc. 4.6).



Ryc. 4.6.

Czy i tym razem oznacza to, że w dowolnym otoczeniu liczby 0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n)?

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Wówczas:

$$a_n \in U(0;\varepsilon) \iff a_n \in (-\varepsilon;\varepsilon) \iff -\varepsilon < a_n < \varepsilon \iff |a_n| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zatem do otoczenia o dowolnym promieniu ε liczby 0 należą wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach n większych od $\frac{1}{\varepsilon}$, a więc prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Powiemy, że zero jest granicą tego ciągu, zaś liczba 1 jest granicą ciągu rozpatrywanego wcześniej.

Mówimy, że liczba g jest **granicą ciągu** (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy w **każdym** otoczeniu liczby g znajdują się **prawie wszystkie** wyrazy tego ciągu.

Zdanie: „Ciąg (a_n) ma granicę g przy n dążącym do nieskończoności" zapiszemy następująco:

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

(skrót „lim" pochodzi od łacińskiego słowa *limes* – granica).

Zapis $(*)$ można również odczytać:

„Ciąg (a_n) dąży do g, gdy n dąży do nieskończoności".

Czasami zamiast $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ będziemy też pisać:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g.$$

Podaną definicję granicy możemy wyrazić symbolicznie:

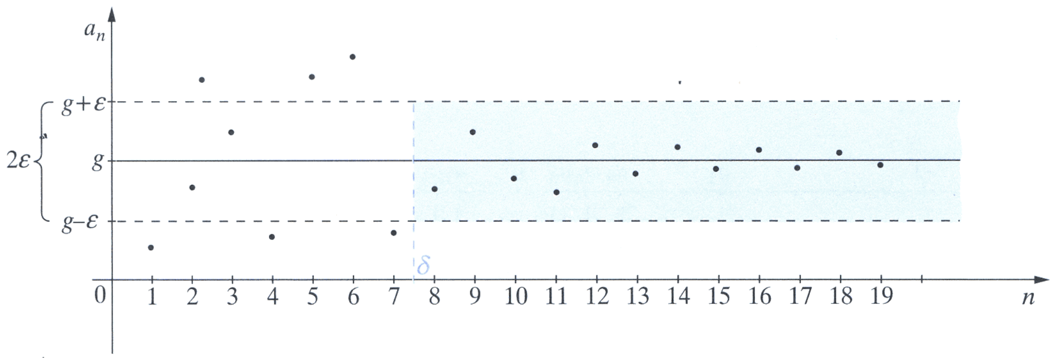
$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} (|a_n - g| < \varepsilon).$$

Aby zatem udowodnić, że dla danego ciągu (a_n):

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} a_n = g,$$

należy dowieść, iż dla każdej liczby dodatniej ε potrafimy wyznaczyć taką liczbę δ, że wszystkie wyrazy tego ciągu o wskaźnikach większych od δ będą należały do $U(g;\varepsilon)$.

Geometryczny sens równości $(*)$ przedstawia rycina 4.7 i jest on następujący: dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n takiej, iż $n > \delta$ punkt $(n; a_n)$ leży w pasku oznaczonym kolorem niebieskim (tzw. pasek epsylonowy).



Ryc. 4.7.

Przykład 1. Wykaż, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Rozwiązanie:

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ:

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1},\text{ więc:}$$

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \iff n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Istnieje zatem taka liczba δ, na przykład $\delta = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność:

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Przykład 2. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ:

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(2n-1) - 2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| = \left|\frac{-5}{3(3n+1)}\right| = \frac{5}{3(3n+1)}, \text{ więc:}$$

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon \iff 3n+1 > \frac{5}{3\varepsilon} \iff n > \frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Wystarczy przyjąć $\delta = \frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}$, by dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ prawdziwa była nierówność:

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$$

Ciąg, który ma granicę, nazywamy **ciągiem zbieżnym**. Ciągi z przykładów 1 i 2 są więc ciągami zbieżnymi odpowiednio do granic 2 i $\frac{2}{3}$. Oto dalsze przykłady ciągów zbieżnych.

Przykład 3. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0$.

Rozwiązanie:

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Należy wykazać istnienie takiej liczby δ, by dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ zachodziła nierówność:

$$(*)\left|\frac{n}{2n^2+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Ale dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy:

$$\left|\frac{n}{2n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{n}{2n^2+1}\right| = \frac{n}{2n^2+1} < \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Zatem jeśli $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, co zachodzi, gdy $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, to dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, gdzie $\delta = \frac{1}{2\varepsilon}$, będzie zachodziła dowodzona nierówność $(*)$.

Przykład 4*. Wykaż, że jeśli $a \in (-1; 1)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Rozwiązanie:

Należy oczywiście wykazać, że:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} \left(\left|a^n - 0\right| < \varepsilon\right).$$

Niech więc ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Gdy $a = 0$, to nierówność $\left|0^n - 0\right| < \varepsilon$ jest spełniona dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Jeśli zaś $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, wtedy $0 < |a| < 1$, czyli $\frac{1}{|a|} > 1$.

Wobec tego $\frac{1}{|a|} = 1 + b$, gdzie $b = \frac{1}{|a|} - 1 > 0$. Na mocy nierówności Bernoulliego (czyli nierówności $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, gdy $x > -1$ i $n \in N$) otrzymujemy dla każdej liczby naturalnej n nierówność:

$\frac{1}{|a|^n} = (1+b)^n > 1 + nb$, a stąd – nierówność:

$$|a|^n < \frac{1}{1+nb}.$$

Wystarczy zatem znaleźć taką liczbę δ, by dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ spełniona była nierówność $\frac{1}{1+nb} < \varepsilon$.

Ale $\frac{1}{1+nb} < \varepsilon \iff 1 + nb > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1-\varepsilon}{b\varepsilon}$.

Przyjmując więc $\delta = \frac{1-\varepsilon}{b\varepsilon}$, otrzymujemy dla $n > \delta$:

$$|a^n| = |a|^n < \frac{1}{1+nb} < \varepsilon.$$

Przykład 5****.** Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Rozwiązanie:

Należy wykazać, że:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} \left(\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon\right).$$

Przyjmujemy, że $\sqrt[1]{1} = 1$.

Ponieważ dla każdej liczby naturalnej większej od 1 zachodzi nierówność $\sqrt[n]{n} > 1$, więc możemy napisać równość $\sqrt[n]{n} = 1 + d_n$, gdzie d_n jest pewną liczbą dodatnią (dokładniej: $\delta = \sqrt[n]{n} - 1$).

Korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona, otrzymujemy:

$$n = (1 + nd_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} d_n + \binom{n}{2} d_n^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} d_n^{n-1} + \binom{n}{n} d_n^n,$$

czyli

$$n = 1 + nd_n + \binom{n}{2} d_n^2 + \ldots + d_n^n.$$

Pomijamy po prawej stronie otrzymanej równości wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszego i trzeciego:

$$n > 1 + \binom{n}{2} d_n^2.$$

Mamy zatem:

$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} d_n^2$, czyli $d_n^2 < \frac{2}{n}$.

Stąd $|d_n| < \sqrt{\frac{2}{n}}$, czyli $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{n}}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

Ponieważ $\sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon \iff \frac{2}{n} < \varepsilon^2 \iff n > \frac{2}{\varepsilon^2}$, więc przyjmując $\delta = \frac{2}{\varepsilon^2}$, otrzymujemy dla każdej liczby naturalnej n większej od δ nierówność $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon$.

Przykład 6.** Udowodnij, że jeżeli $a > 0$, to $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $\sqrt[1]{a} = a$. Możliwe są trzy przypadki:

1. $a = 1$. Wtedy $\sqrt[n]{a} = 1$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. Stąd wynika, że nierówność $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$ dla każdej liczby dodatniej ε jest spełniona przez wszystkie wyrazy ciągu $\left(\sqrt[n]{a}\right)$.
2. $a > 1$. Wówczas dla każdej dodatniej liczby naturalnej n istnieje liczba dodatnia d_n taka, że $\sqrt[n]{a} = 1 + d_n$ (wystarczy przyjąć $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$). Korzystając z nierówności Bernoulliego, otrzymujemy:

   $a = (1 + d_n)^n \geqslant 1 + nd_n$, skąd $nd_n \leqslant a - 1$, czyli $d_n \leqslant \frac{a-1}{n}$.

   Wobec tego:

   $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \left|d_n\right| = d_n \leqslant \frac{a-1}{n}$, czyli:

   $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$.

   Jeśli ε jest dowolną liczbą dodatnią, to $\frac{a-1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{a-1}{\varepsilon}$.

   Przyjmując więc $\delta = \frac{a-1}{\varepsilon}$, otrzymujemy dla każdej liczby naturalnej n większej od δ nierówność:

   $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$.
3. $0 < a < 1$. Wówczas $\frac{1}{a} > 1$ i zgodnie z przypadkiem 2 dla każdej dodatniej liczby ε znajdziemy taką liczbę δ (np. $\delta = \frac{\frac{1}{a} - 1}{\varepsilon}$), by dla każdej liczby naturalnej n większej od δ spełniona była nierówność:

   $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1\right| < \varepsilon$,

   a stąd nierówność: $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$.

Przykład 7. Wykaż, że nie istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, wbrew tezie, że istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$. Niech $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n = g$. Wówczas zgodnie z definicją:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} \left|(-1)^n - g\right| < \varepsilon.$$

Tymczasem, gdy $\varepsilon = 1$, nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\left((-1)^n\right)$ spełnia nierówność: $\left|(-1)^n - g\right| \geqslant \varepsilon$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ciąg $\left((-1)^n\right)$ nie ma granicy.

Przejdźmy teraz do omawiania własności ciągów zbieżnych. Zostały one sformułowane w postaci twierdzeń.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest **ograniczony z dołu**, gdy wszystkie jego wyrazy są nie mniejsze od pewnej liczby rzeczywistej.

Symbolicznie zapiszemy to następująco:

Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu $\iff \bigvee_{m \in R} \bigwedge_{n \in N} (a_n \geqslant m)$.

Na przykład:
- ciąg kolejnych liczb naturalnych jest ograniczony z dołu, na przykład przez 0;
- ciąg $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ jest ograniczony z dołu, na przykład przez -1, bo $\frac{n}{n+1} > -1$ dla każdej liczby naturalnej n;
- ciąg $(2^n + 1)$ jest ograniczony z dołu, na przykład przez 2, bo $2^n + 1 \geqslant 2$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zauważmy, że jeżeli ciąg ogranicza z dołu liczba m, to ogranicza go z dołu każda liczba m_1 nie większa od m.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest **ograniczony z góry**, gdy wszystkie jego wyrazy są nie większe od pewnej liczby rzeczywistej.

Symbolicznie zapiszemy to tak:

Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry $\iff \bigvee_{M \in R} \bigwedge_{n \in N} (a_n \leqslant M)$.

Na przykład:
- ciąg $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ jest ograniczony z góry, na przykład przez 1, bowiem dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{n}{n+1} < 1$;
- ciąg $(4 - 2^n)$ jest ograniczony z góry, na przykład przez 3, gdyż $4 - 2^n \leqslant 3$ dla każdej liczby naturalnej n.

Oczywiście, jeżeli ciąg ogranicza z góry liczba M, to ogranicza go z góry każda liczba M_1 nie mniejsza od M.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest **ograniczony**, gdy jest ograniczony **z dołu i z góry**, co można wyrazić następująco:
ciąg (a_n) jest ograniczony $\iff \bigvee_{M > 0} \bigwedge_{n \in N} (|a_n| \leqslant M)$.

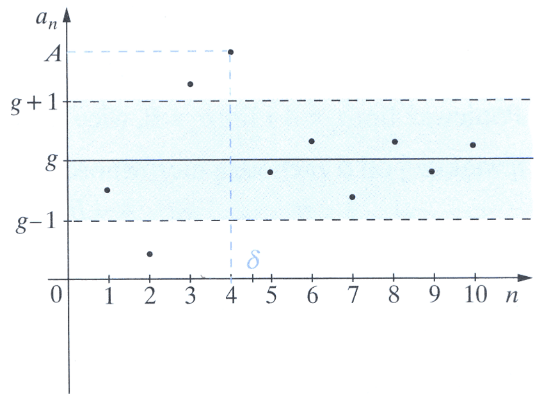
Na przykład:
- ciąg $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ jest ograniczony, gdyż dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\left|\frac{n}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}$;
- ciąg $\left(\frac{2^n-1}{2^n+1}\right)$ jest ograniczony, bo dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $\left|\frac{2^n-1}{2^n+1}\right| < 1$.

Przejdźmy teraz do zapowiedzianych twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

□ Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem zbieżnym do liczby g, czyli niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Istnieje więc taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $|a_n - g| < 1$ (przyjmujemy tutaj $\varepsilon = 1$, ryc. 4.8).



Ryc. 4.8.

Ponieważ $|a_n| = |a_n - g + g| \leqslant |a_n - g| + |g|$, więc dla każdej liczby naturalnej większej od δ zachodzi nierówność $|a_n| \leqslant 1 + |g|$. Jeśli A oznacza nie mniejszą z liczb $|a_n|$ dla n takich, że $n \leqslant \delta$, zaś M – nie mniejszą z liczb A i $|g| + 1$, to dla każdej liczby naturalnej n będziemy mieli nierówność $|a_n| \leqslant M$, która kończy dowód twierdzenia. □

Przykład ciągu $\left((-1)^n\right)$ pokazuje, że twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe. Ciąg ograniczony nie musi być zbieżny. Ograniczoność ciągu jest zatem warunkiem koniecznym zbieżności, lecz niewystarczającym.

Twierdzenie 2.

Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny (rosnący lub malejący) jest zbieżny.

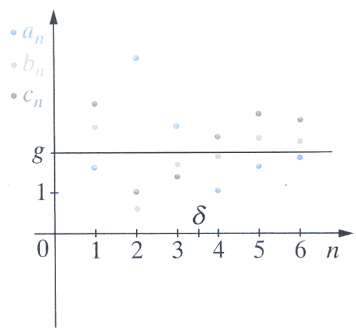
Pomijamy dowód tego twierdzenia.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje taka liczba δ_0, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ_0 zachodzą nierówności $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$ (ryc. 4.9).

□ Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, więc istnieje taka liczba δ_1, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ_1 zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. W szczególności więc:

$(*)\ g - \varepsilon < a_n$ dla $n > \delta_1$.



Ryc. 4.9.

Ponadto także $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, więc istnieje taka liczba δ_2, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ_2 prawdziwa jest nierówność $|c_n - g| < \varepsilon$, a więc w szczególności nierówność:

$(**)\ c_n < g + \varepsilon$ dla $n > \delta_2$.

Obierając δ jako największą z liczb δ_0, δ_1 i δ_2, otrzymujemy dla każdej liczby naturalnej n większej od δ nierówności: $g - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \varepsilon$, czyli nierówności: $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$, a więc nierówność $|b_n - g| < \varepsilon$.

Zatem rzeczywiście: $\bigwedge\limits_{\varepsilon > 0} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n > \delta} |b_n - g| < \varepsilon$. □

Twierdzenie (o zachowaniu nierówności)

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ oraz istnieje taka liczba δ_0, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ_0 zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$, to $A \leqslant B$.

☐ Dowód (przez sprzeczność). Przypuśćmy wbrew tezie, że $A > B$ i przyjmijmy $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, więc istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzą nierówności:

$$|a_n - A| < \frac{A-B}{2} \text{ i } |b_n - B| < \frac{A-B}{2}.$$

W szczególności więc, gdy $n > \delta$, to:

$$a_n > \frac{A+B}{2} \text{ i } b_n < \frac{A+B}{2},$$

skąd $a_n > b_n$ dla $n > \delta$. Ostatnia nierówność przeczy jednak nierówności podanej w założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy dowód słuszności tezy. ☐

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że nierówność nieostra zachowuje się w granicy. Tymczasem nierówność ostra może się nie zachować w granicy.

Na przykład dla każdej liczby dodatniej naturalnej n zachodzi nierówność: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$, zaś $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$.

Pytania i zadania

1. Kiedy liczba g jest granicą ciągu (a_n)?
2. Zinterpretuj geometrycznie definicję granicy ciągu i zapisz ją symbolicznie.
3. Udowodnij na podstawie definicji granicy ciągu, że:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} = 1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-5n+6}{1-n^2} = -1$;

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1} = 1$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n(n+1)} = 1$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$.
4. Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$.
5. Oblicz granice:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$,

   gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są ustalonymi liczbami dodatnimi.
6. Który z podanych poniżej ciągów o wyrazie ogólnym a_n jest ograniczony:

   a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$; b) $a_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$; c) $a_n = \frac{3n^2-1}{2+n^2}$;

d) $a_n = \dfrac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}$; e) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

f) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

12. Działania na ciągach zbieżnych

Ciągi zbieżne można dodawać, odejmować, mnożyć oraz dzielić. W wyniku tych działań otrzymujemy także ciągi zbieżne. Dokładniej ujmuje to następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych)

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ i $(a_n \cdot b_n)$ także są zbieżne i zachodzą równości:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

Jeżeli ponadto $B \neq 0$, to również ciąg $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i prawdziwa jest równość:

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

☐ Dowód. Podzielmy ten dowód na cztery części, które dotyczyć będą kolejno wzorów (1)–(4).

1. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

   Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, więc istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzą nierówności: $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Natomiast dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leqslant$ $\leqslant |a_n - A| + |b_n - B|$. Zatem, gdy $n > \delta$, otrzymujemy:

   $|(a_n + b_n) - (A + B)| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2. Dowód analogiczny do części 1.

3. Ciąg (a_n) jest zbieżny, więc jest ograniczony: $\bigvee\limits_{M>0} \bigwedge\limits_{n\in N} |a_n| \leqslant M$.

   Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy:

   $(*)\ |a_n b_n - A\cdot B| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| = |a_n(b_n - B) + (a_n - A)\cdot B| \leqslant$
   $\leqslant |a_n(b_n - B)| + |(a_n - A)\cdot B| = |a_n|\cdot|b_n - B| + |a_n - A|\cdot|B|$.

   Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, więc dla dowolnej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzą nierówności:

   $(**)\ |a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ i $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

   Wobec tego na mocy ograniczoności ciągu (a_n) i nierówności $(*)$ i $(**)$ dla $n > \delta$:

   $|a_n b_n - AB| \leqslant |a_n|\cdot|b_n - B| + |a_n - A|\cdot|B| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M} + \dfrac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\cdot|B| =$

   $= \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{|B|}{2(|B|+1)} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, bo $\dfrac{|B|}{2(|B|+1)} < 1$.

4. Ciąg (a_n) jest ograniczony, więc $\bigvee\limits_{M>0}\ \bigwedge\limits_{n\in N}\ (|a_n| \leqslant M)$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, więc $\bigvee\limits_{\delta_1\in R}\ \bigwedge\limits_{n>\delta_1}\ (b_n \neq 0)$.

Z drugiej strony $\lim\limits_{n\to\infty} (B \cdot b_n) = B^2$, więc $\bigvee\limits_{\delta_2\in R}\ \bigwedge\limits_{n>\delta_2}\ \left(B \cdot b_n > \frac{B^2}{2}\right)$.

Niech δ_0 będzie większą z liczb δ_1 i δ_2. Wówczas, gdy $n > \delta_0$, otrzymamy:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n(B-b_n) + b_n(a_n - A)}{b_n B}\right| =$$

$$= \frac{1}{|b_n B|} \cdot |a_n(B-b_n) + b_n(a_n-A)| \leqslant \frac{1}{|b_n B|}(|a_n(B-b_n)| + |b_n(a_n-A)|) =$$

$$= \frac{1}{|b_n B|} \cdot (|a_n| \cdot |b_n - B| + |b_n| \cdot |a_n - A|) =$$

$$= \frac{|a_n|}{|b_n B|} \cdot |b_1 - B| + \frac{1}{|B|} \cdot |a_n - A| \leqslant \frac{2M}{B^2} \cdot |b_n - B| + \frac{1}{|B|} \cdot |a_n - A|, \text{ czyli:}$$

$$(*) \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{2M}{B^2} \cdot |b_1 - B| + \frac{1}{|B|} \cdot |a_n - a|.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, więc dla każdej liczby dodatniej ε znajdziemy taką liczbę δ większą od δ_0, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ będą spełnione nierówności:

$$(**) |a_n - A| < \frac{|B|}{2} \cdot \varepsilon \ \text{ i } \ |b_n - B| < \frac{B^2}{4M} \cdot \varepsilon.$$

Na podstawie nierówności $(*)$ i $(**)$ stwierdzamy więc, że:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta\in R}\ \bigwedge_{n>\delta}\ \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. □

Przykład 1. Oblicz granicę ciągu (a_n), jeśli $a_n = \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$a_n = \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2} = \frac{n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1 - 5 \cdot \frac{1}{n} + 6 \cdot \frac{1}{n^2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{n^2}},$$

więc na podstawie twierdzenia o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 5 \cdot \frac{1}{n} + 6 \cdot \frac{1}{n^2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0} = 1.$$

Przykład 2. Oblicz granicę ciągu (b_n), gdy $b_n = \frac{(n+1)(2n+3)}{(3n-2)(n+5)}$.

Rozwiązanie:

Otrzymujemy: $b_n = \frac{(n+1)(2n+3)}{(3n-2)(n+5)} = \frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n \cdot \left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot n \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + 3 \cdot \frac{1}{n}\right)}{\left(3 - 2 \cdot \frac{1}{n}\right)\left(1 + 5 \cdot \frac{1}{n}\right)}$.

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+3\cdot\frac{1}{n}\right)}{\left(3-2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+5\cdot\frac{1}{n}\right)} = \frac{(1+0)(2+3\cdot 0)}{(3-2\cdot 0)(1+5\cdot 0)} = \frac{2}{3}.$$

Przykład 3. Oblicz granicę ciągu (c_n), jeśli $c_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$c_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n} = \frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1},$$

więc:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

Przykład 4. Wyznacz granicę ciągu (d_n), gdy $d_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}$.

Rozwiązanie:

Przedstawmy wzór na ogólny wyraz tego ciągu w najprostszej postaci. Korzystając ze wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wobec tego:

$$d_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 5. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $4 \leqslant \sqrt[n]{3^n+4^n} \leqslant 4\sqrt[n]{2}$ (wobec czego możemy przyjąć $\delta_0 = 0$), a ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{2} = \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \sqrt[n]{2} = 4$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n} = 4$.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych.
2. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$. Oblicz:

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right)$; b) $\lim_{n\to\infty}(2a_n - 3b_n)$; c) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + b_n)$;

   d) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$; e) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 \cdot b_n^3\right)$; f) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2b_n}$.
3. Ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$, ciąg (b_n) jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Oblicz:

   a) $\lim_{n\to\infty}(2a_n + 3b_n)$; b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$; c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$.
4. Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} b_n$, jeśli:

   a) $b_n = \frac{3a_n + 1}{a_n + 2}$; b) $b_n = 3a_n^2 + a_n$; c) $b_n = \frac{a_n^2 - a_n - 2}{a_n - 2}$;

   d) $b_n = \frac{a_n^2 - 1}{a_n + 1}$; e) $b_n = \frac{a_n^3 + 1}{a_n + 1}$; f) $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n^3 - 1}$.
5. Wiadomo, że $a_n = \frac{n-2}{n+1}$, $b_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4}$. Oblicz:

   a) $\lim_{n\to\infty} a_n$; b) $\lim_{n\to\infty} b_n$; c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$; d) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.
6. Oblicz:

   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 - 3n^2 + 5n - 7}{(n-1)(n-2)(n-3)}$; b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$; c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}{n^2}$;

   d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$; e) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1} - 2^n}{2^n + 3^n}$; f) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n - 1}{1 - 2^{n-1}}$.
7. Oblicz:

   a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$; b*) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n}$.

13. Wyznaczanie granic ciągów zbieżnych

Zanim przejdziemy do kolejnych, tym razem nieco trudniejszych, przykładów na obliczanie granic ciągów zbieżnych, musimy poznać jeszcze kilka twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do zera, zaś ciąg (b_n) jest ograniczony, to ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest zbieżny do zera.

☐ Dowód. Należy oczywiście wykazać, że $\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta\in R}\bigwedge_{n>\delta} |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$.

Ponieważ ciąg (b_n) jest ograniczony, więc $\bigvee_{M>0}\bigwedge_{n\in N} |b_n| \leqslant M$.

Ponadto, z założenia, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, wobec tego $\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta\in R}\bigwedge_{n>\delta} |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Zatem dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ mamy: $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. ☐

Twierdzenie 2.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie oraz ciąg ten jest zbieżny do liczby nieujemnej A, to dla każdej liczby naturalnej k większej od 1 ciąg $(\sqrt[k]{a_n})$ jest zbieżny do $\sqrt[k]{A}$.

☐ Dowód. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $A = 0$. Wtedy z założenia: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej δ_1, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $|a_n| < \varepsilon^k$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią. A ponieważ $|a_n| < \varepsilon^k \iff a_n < \varepsilon^k \iff \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon \iff |\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$, bo $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, więc rzeczywiście $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta\in R} \bigwedge\limits_{n>\delta} |\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$.
2. $A > 0$. Korzystając ze wzoru $x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1})$, mamy:

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-2}\cdot\sqrt[k]{A} + \ldots + \sqrt[k]{a_n}\cdot\left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-2} + \left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-1}}.$$

Ponieważ mianownik ułamka znajdującego się po prawej stronie tej równości jest większy od $\sqrt[k]{A}^{\,k-1}$, więc:

$$(*)\ \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| < \frac{|a_n - A|}{\left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-1}}.$$

Ale ze zbieżności ciągu (a_n) do granicy A wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność:

$$(**)\ |a_n - A| < \varepsilon\cdot\left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-1}.$$

Z nierówności $(*)$ i $(**)$ wnioskujemy, że rzeczywiście:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta\in R} \bigwedge_{n>\delta} \left(\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| < \varepsilon\right).$$

Dowód twierdzenia został zakończony. ☐

Twierdzenie 3.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i ciąg ten jest zbieżny do liczby dodatniej A, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ jest zbieżny do 1.

☐ Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, więc dla każdej liczby ε dodatniej i mniejszej od A istnieje liczba rzeczywista δ taka, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ale $|a_n - A| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \iff A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \iff$

$\iff \sqrt[n]{A-\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{A+\varepsilon}$.

Jeśli w ostatniej nierówności wyznaczymy granicę dla n dążącego do nieskończoności, otrzymamy, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, bo $A - \varepsilon > 0$, $A + \varepsilon > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A-\varepsilon} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A+\varepsilon} = 1$. ☐

Powróćmy teraz do przykładów.

Przykład 1. Oblicz granicę ciągu (a_n), którego n-ty wyraz określony jest wzorem:

$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$

Rozwiązanie:

Przekształcając ten wzór, otrzymujemy:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}.\text{ Stąd:}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Przykład 2. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 12n^2} - n\right)$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru: $(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$, otrzymujemy:

$$\sqrt[3]{n^3+12n^2} - n = \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+12n^2} - n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3+12n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+12n^2}\cdot n + n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n^3+12n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+12n^2}\cdot n + n^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+12n^2}\right)^3 - n^3}{n^2\left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}} + 1\right]} = \frac{n^3 + 12n^2 - n^3}{n^2\left[\left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}} + 1\right]} =$$

$$= \frac{12}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}} + 1}.\text{ Stąd:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+12n^2} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{12}{n}} + 1} = \frac{12}{3} = 4.$$

Przykład 3. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 4\cdot 7^n}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\sqrt[n]{2\cdot 3^n + 4\cdot 7^n} = \sqrt[n]{7^n\left(2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n + 4\right)} = 7\cdot\sqrt[n]{2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n + 4}$ oraz:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n + 4\right) = 2\cdot 0 + 4 = 4$, więc:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 4\cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} 7\cdot\sqrt[n]{2\left(\frac{3}{7}\right)^n + 4} = 7\cdot 1 = 7.$$

Przykład 4. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$.
Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą nierówności:

$\sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \leqslant \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$, a ponadto:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1$,

więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = 1.$$

Przykład 5*. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich, mamy:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2}} < \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n-2}}{n} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{n}.$$ Ponadto oczywiście $\sqrt[n]{n} > 1$ dla $n \geqslant 2$.

Zatem dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 zachodzą nierówności:

$$1 < \sqrt[n]{n} < 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Wobec tego na podstawie twierdzenia o trzech ciągach stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (dlaczego?).

Przykład 6*. Wykaż, że jeżeli $a > 0$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Rozwiązanie:

Jeśli $a \geqslant 1$, to oczywiście $\sqrt[n]{a} \geqslant 1$. Z drugiej strony, na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb dodatnich, dla każdej liczby naturalnej n większej od 1:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \leqslant \frac{a + \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n-1}}{n} = \frac{a + n - 1}{n} = a \cdot \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}.$$

Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 zachodzą nierówności:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant a \cdot \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}.$$

Stąd na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Gdy zaś $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Przykład 7. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Rozwiązanie:

Ponieważ ciąg $\left((-1)^n\right)$ jest ograniczony, zaś ciąg $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ jest zbieżny do zera, więc: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$.

Pytania i zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{n^4+2n-1}{n^5-n^3+n^2}$; b) $a_n = \sqrt[3]{n^3+5n^2} - n$; c) $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+10^n}$;

d) $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$; e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{2n-\sqrt{4n^2+3n}}$; f) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{1-n^3}{n^3+n^2-n}}$;

g) $a_n = \sqrt{\dfrac{4n^2-3}{n^2+1}}$; h) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{27n^2+n+1}{8+4n-8n^2}}$; i) $a_n = \dfrac{n^2+2n\cos n\frac{\pi}{2}}{1-n^2}$.

2. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+7^n}{(-2)^n+7^{n+1}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} \cdot (-1)^{n-1}$.

3*. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)\left(1-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

4. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{4n^4+3n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2} - \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{3n^4}$; d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

14. Ciągi rozbieżne do nieskończoności i ich własności

Wśród ciągów nieskończonych wyróżniamy ciągi, których wyrazy albo nieograniczenie rosną, albo nieograniczenie maleją. Ciągi takie nazywamy **rozbieżnymi do nieskończoności**.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest **rozbieżny do plus nieskończoności** i piszemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

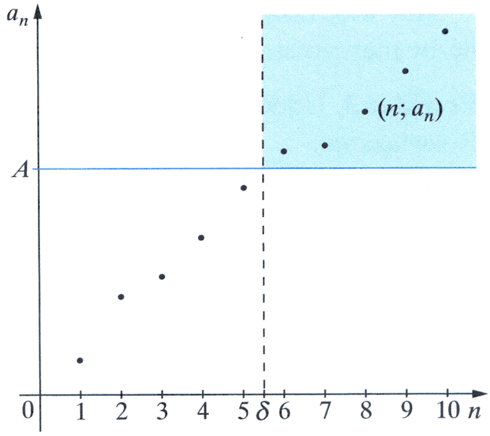
wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej **prawie wszystkie** wyrazy tego ciągu są od niej **większe**.

Oto symboliczny zapis tej definicji: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \bigwedge\limits_{A\in R}\ \bigvee\limits_{\delta\in R}\ \bigwedge\limits_{n>\delta} (a_n > A)$.

Geometryczny sens tej definicji jest następujący:

dla każdej liczby rzeczywistej A istnieje taka liczba δ, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ punkt $(n; a_n)$ leży powyżej prostej o równaniu $y = A$ (ryc. 4.10).

Aby zatem wykazać, że ciąg jest rozbieżny do $+\infty$, wystarczy stwierdzić, iż dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są od niej większe.



Ryc. 4.10.

Przykład 1. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} 3n = +\infty$.
Rozwiązanie:

Niech A będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $3n > A \iff n > \frac{A}{3}$, więc istnieje taka liczba δ, na przykład $\delta = \frac{A}{3}$, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $3n > A$. To zaś dowodzi rozbieżności ciągu $(3n)$ do $+\infty$.

Przykład 2*. Wykaż, że jeżeli $a > 1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Rozwiązanie:

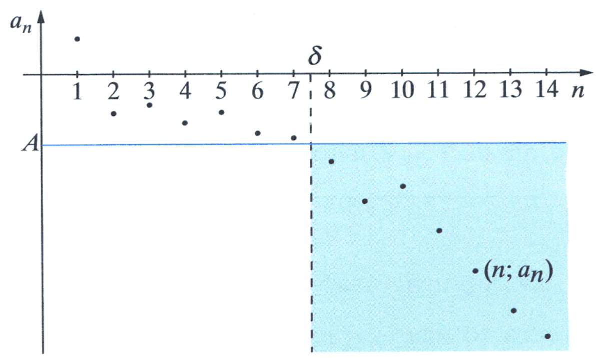
Należy dowieść, że $\bigwedge_{A>0} \bigvee_{\delta \in R} \bigwedge_{n>\delta} (a^n > A)$. Skoro $a > 1$, to istnieje taka liczba dodatnia b, że $a = 1 + b$ (wystarczy przyjąć $b = a - 1$). Ponieważ na podstawie nierówności Bernoulliego dla każdej liczby naturalnej n otrzymujemy: $a^n = (1+b)^n \geqslant 1 + nb$, więc jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby dodatniej prawie wszystkie wyrazy ciągu $(1 + nb)$ są od niej większe, to dowód rozbieżności ciągu (a^n) do $+\infty$ będzie zakończony. Niech A będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ: $1 + nb > A \iff nb > A - 1 \iff n > \frac{A-1}{b}$, więc istnieje taka liczba δ, na przykład $\delta = \frac{A-1}{b}$, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $1 + nb > A$.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest **rozbieżny do minus nieskończoności**, co zapisujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej **prawie wszystkie** wyrazy tego ciągu są od niej mniejsze.

Symbolicznie można tę definicję wyrazić następująco: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff$ $\iff \bigwedge_{A \in R} \bigvee_{\delta \in R} \bigwedge_{n>\delta} (a_n < A)$, a jej interpretację geometryczną przedstawia rycina 4.11. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej A istnieje taka liczba δ, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ punkt $(n; a_n)$ leży poniżej prostej o równaniu $y = A$.



Ryc. 4.11.

Aby więc dowieść, że ciąg jest rozbieżny do $-\infty$, wystarczy stwierdzić, iż dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej prawie wszystkie jego wyrazy są od niej mniejsze.

Przykład 3. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1-2n)=-\infty$.
Rozwiązanie:

Niech A będzie dowolną liczbą ujemną. Ponieważ $1-2n<A \iff 2n>1-A \iff n>\frac{1-A}{2}$, więc istnieje taka liczba δ, na przykład $\delta=\frac{1-A}{2}$, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $1-2n<A$, co dowodzi rozbieżności ciągu $(1-2n)$ do $-\infty$.

Przykład 4. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-n^2\right)=-\infty$.
Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby ujemnej A mamy: $2-n^2<A \iff n^2>2-A \iff n>\sqrt{2-A}$, bo $2-A>0$, zaś n jest dodatnią liczbą naturalną.

Przyjmując zatem $\delta=\sqrt{2-A}$, stwierdzamy, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ zachodzi nierówność $2-n^2<A$. Stąd wynika, że ciąg $\left(2-n^2\right)$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Własności ciągów rozbieżnych do nieskończoności

Wiemy, że na przykład $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. Oczywiście ciąg $\left((-2)^n\right)$ nie jest rozbieżny ani do $-\infty$, ani do $+\infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-2)^n\right|=+\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(-2)^n}\right|=0$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

□ Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, więc $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}\ \bigvee\limits_{\delta\in R}\ \bigwedge\limits_{n>\delta}\ |a_n|>\frac{1}{\varepsilon}$.

Ale $|a_n|>\frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{|a_n|}<\varepsilon \iff \left|\frac{1}{a_n}\right|<\varepsilon$. Zatem $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}\ \bigvee\limits_{\delta\in R}\ \bigwedge\limits_{n>\delta}\ \left|\frac{1}{a_n}\right|<\varepsilon$, a to dowodzi zbieżności ciągu $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ do zera. □

Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty}3n=+\infty$. Z kolei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2^n\right)=-\infty$. Tymczasem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$, zaś ciąg $\left((-2)^n\right)$ nie jest rozbieżny ani do $-\infty$, ani do $+\infty$. Zachodzi bowiem kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie (ujemne) i ciąg ten jest zbieżny do zera, to ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$.

▢ Dowód. Załóżmy, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Zatem:

$$\bigvee_{\delta_1\in R}\ \bigwedge_{n>\delta_1} a_n > 0 \text{ oraz } \bigwedge_{A>0}\ \bigvee_{\delta_2\in R}\ \bigwedge_{n>\delta_2} |a_n| < \frac{1}{A}.$$

Wówczas dla każdej dodatniej liczby naturalnej n większej od δ, gdzie δ jest równa większej z liczb δ_1 i δ_2, zachodzą nierówności $a_n > 0$ i $a_n < \frac{1}{A}$, a więc także nierówność $\frac{1}{a_n} > A$, która dowodzi rozbieżności ciągu $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ do $+\infty$. ▢

Dowód rozbieżności ciągu $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ do $-\infty$, gdy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) zbieżnego do zera są ujemne, przebiega podobnie.

Inne twierdzenia dotyczące ciągów rozbieżnych do nieskończoności, pomagające wyznaczać granice w przypadkach, kiedy nie można skorzystać bezpośrednio z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych, podajemy bez dowodu w poniższej tabeli:

Jeżeli:		**to:**	
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ oraz	$B > 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n =$	$+\infty$
	$B < 0$		$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$		$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$		$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$		$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$	
ciąg (a_n) jest ograniczony i $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert b_n\rvert = +\infty$		$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$	

Twierdzenia te mogą też ułatwić zbadanie, czy dany ciąg jest rozbieżny. Przykłady:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2}} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+n} + 2n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2\right) = +\infty$;

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n^2+2n+7} - \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\sqrt{n^2+2n+7} + \sqrt{n^2+1}\right)}{n^2+2n+7-\left(n^2+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2+\frac{6}{n}} = 4.$$

Pytania i zadania

1. Podaj określenie ciągu rozbieżnego do:
   a) $+\infty$; b) $-\infty$.
2. Wykaż, że:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 = +\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-n^3) = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$.
3. Znajdź granicę ciągu (a_n), gdy:
   a) $a_n = \frac{n^2+2}{n+1}$; b) $a_n = \frac{2n-4}{1+2n^2}$; c) $a_n = \frac{4-n^2}{1+n}$;
   d) $a_n = \frac{4n^3+n^2+1}{3n-2}$; e) $a_n = 2n^4 - n^3 + 2n^2 - 1$; f) $a_n = \frac{n^3-2n^2+1}{-n^2+n-1}$.

4*. Udowodnij twierdzenie: Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

5*. Sformułuj i udowodnij analogiczne twierdzenie dla ciągów rozbieżnych do $-\infty$.

6. Zbadaj zbieżność ciągu $(a_n - b_n)$, gdy ciągi (a_n) i (b_n) dane są wzorami ogólnymi:
   a) $a_n = 3n$, $b_n = 2n$; b) $a_n = 3n$, $b_n = 5n$; c) $a_n = 2n+1$, $b_n = 2n-1$;
   d) $a_n = -4n$, $b_n = -n$; e) $a_n = 1-2n$, $b_n = 2-2n$.

   Czy z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, można wywnioskować rozbieżność ciągu $(a_n - b_n)$?

7*. Udowodnij twierdzenia:
   a) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$;
   b) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

8. Zbadaj zbieżność ciągu $(a_n \cdot b_n)$, gdy ciągi (a_n) i (b_n) dane są wzorami ogólnymi:
   a) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$; b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$; c) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $b_n = 2n^3$.

   Czy z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, można wnioskować zbieżność ciągu $(a_n \cdot b_n)$?

9. Udowodnij, że jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony i $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

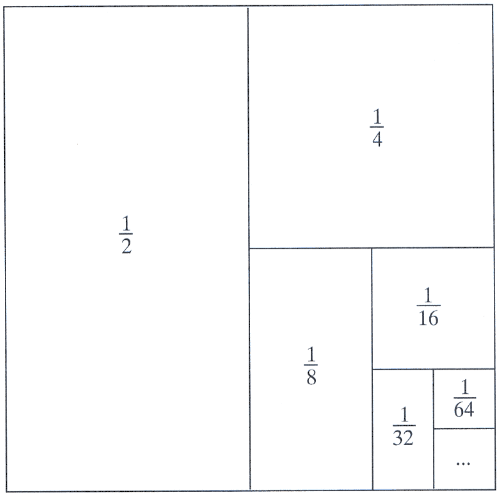
10. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)n-2}$ jest:
    a) zbieżny do zera; b) zbieżny do 1; c) rozbieżny do $+\infty$; d) rozbieżny do $-\infty$?

11. Dla jakiej wartości parametru k ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{kn^2-1}{(k-1)n^2+n}$ jest:
    a) zbieżny do zera; b) zbieżny do 1; c) zbieżny do 2;
    d) rozbieżny do $+\infty$; e) rozbieżny do $-\infty$?

15. Szereg geometryczny i jego zbieżność

Tym razem zacznijmy od przykładów.

Przykład 1. Kwadrat o polu 1 rozcinamy na dwa prostokąty o równych polach. Następnie jeden z nich rozcinamy na dwa kwadraty o równych polach, z których jeden znowu rozcinamy na dwa prostokąty o równych polach itd. (ryc. 4.12). Rozcinanie to możemy powtórzyć dowolnie wiele razy, czyli – inaczej mówiąc – przedłużać w nieskończoność.



Ryc. 4.12.

Otrzymamy w ten sposób nieskończony ciąg figur, na przemian prostokątów i kwadratów, o polach:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots.$$

Jest to zatem nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Dodając kolejno wyrazy tego ciągu, czyli obliczając sumy:

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32},$$

$$S_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64},$$

....

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

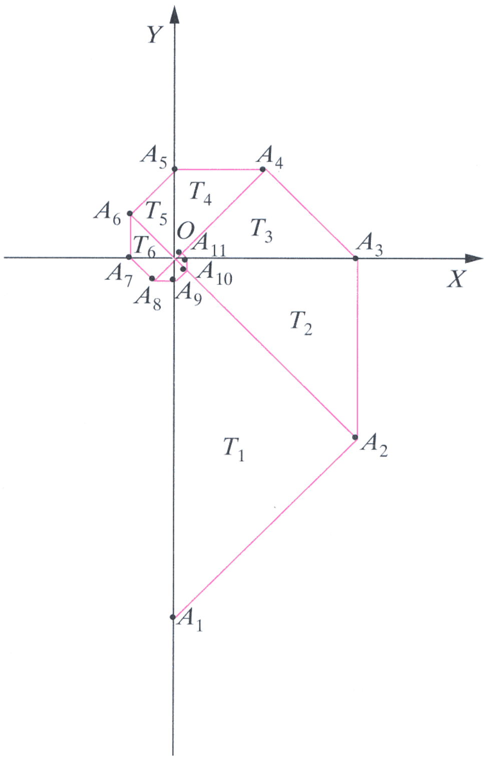
....

spostrzegamy, że gdy liczba składników sumy S_n nieograniczenie wzrasta, to wartość tej sumy różni się coraz mniej od 1 (pola danego kwadratu o boku długości 1). Nic w tym dziwnego, gdyż:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1.$$

Przykład 2. Rozważmy figurę pokazaną na rycinie 4.13. Powstaje ona w ten sposób, że na przyprostokątnej równoramiennego trójkąta prostokątnego T_1 o ramieniu długości 1 budujemy równoramienny trójkąt prostokątny T_2. Następnie na przyprostokątnej trójkąta T_2 budujemy podobnie trójkąt T_3 itd.

Jaka jest długość łamanej $A_1A_2A_3, \ldots$, utworzonej z przyprostokątnych tych trójkątów? Łamana ta składa się z nieskończenie wielu odcinków: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, ... Oznaczamy kolejno ich długości przez $a_1, a_2, a_3, \ldots$, zatem $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$ itd. Wyznaczmy teraz sumę długości wszystkich tych odcinków.



Ryc. 4.13.

Z założenia $a_1 = 1$. Z twierdzenia Pitagorasa, możemy obliczyć, że $OA_2^2 = A_2A_3^2 + OA_3^2$, czyli $a_1^2 = a_2^2 + a_2^2$, skąd $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podobnie stwierdzamy, że $a_3 = \frac{1}{2}$. Ogólnie, rozpatrując trójkąt prostokątny OA_nA_{n-1}, z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$OA_n^2 = A_nA_{n+1}^2 + OA_{n+1}^2, \text{ czyli } a_{n-1}^2 = a_n^2 + a_n^2. \text{ Stąd } a_{n-1}^2 = 2a_n^2, \text{ czyli } a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{n-1}.$$

Otrzymaliśmy zatem nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dodając kolejno wyrazy tego ciągu, to znaczy obliczając sumy:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

....,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

....,

stwierdzamy, że należy znaleźć wartość nieskończonej sumy:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \ldots, \text{ czyli granicę ciągu } (S_n).$$

Ponieważ $S_n = 1 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$, więc

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}$, gdyż $\lim\limits_{n \to \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] = 1$.

Przejdźmy teraz do rozważań ogólniejszych. Rozpatrzmy dowolny nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q, a więc ciąg o wyrazach $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots, a_1 q^{n-1}, \ldots$

Wiemy, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}, & \text{gdy } q \neq 1, \\ na_1, & \text{gdy } q = 1. \end{cases}$$

Ciąg (S_n), taki że:

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_1 q$,

$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$,

....,

$S_n = a_1 + a_2 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$,

....,

nazywamy **ciągiem sum częściowych** nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) lub **szeregiem geometrycznym** i oznaczamy symbolem:

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$.

Jeżeli ciąg (S_n) jest zbieżny, to jego granicę S nazywamy **sumą nieskończonego ciągu geometrycznego** $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots, a_1 q^{n-1}, \ldots$ lub **sumą szeregu geometrycznego**:

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$,

a wyrazy $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots, a_1 q^{n-1}, \ldots$ – wyrazami tego szeregu. Jeżeli szereg ten ma sumę, to mówimy, że jest **zbieżny**. Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy szeregiem **rozbieżnym**. Zatem jeśli (S_n) jest zbieżny do granicy S, to piszemy:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}\right) = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Twierdzenie

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) jest zbieżny oraz:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Dowód. Wiemy, że gdy $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, a ponadto:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Wobec tego na podstawie twierdzenia o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n\right) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Tak więc:

> Jeżeli $|q| < 1$, to $S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Przeanalizujmy jeszcze przypadki, gdy:

$q = 1$ lub $q = -1$, lub $|q| > 1$.

1. Niech $q = 1$. Wtedy $S_n = na_1$ i widzimy, że:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, \text{ gdy } a_1 > 0 \\ -\infty, \text{ gdy } a_1 < 0. \end{cases}$$

2. Gdy $q = -1$, wtedy $S_n = a_1$ dla n nieparzystego, zaś $S_n = 0$ dla n parzystego. Zatem nie istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
3. Niech $|q| > 1$. Wówczas:

$$|S_n| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right| \cdot |q^n - 1|.$$

A ponieważ $|q^n - 1| \geqslant |q|^n - 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = +\infty$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Ciąg (S_n) jest zatem rozbieżny.

Zapamiętajmy więc, że:

> Szereg geometryczny $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$ jest:
>
> a) zbieżny i ma sumę $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, gdy $|q| < 1$;
>
> b) rozbieżny, gdy $|q| \geqslant 1$.

Powróćmy do przykładów.

Przykład 3. Oblicz sumę szeregu geometrycznego $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \ldots$.

Rozwiązanie:

Mamy tutaj: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = 1$.

Obliczamy iloraz tego szeregu: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Jest nim liczba $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. A ponieważ $|q| < 1$, więc szereg ten jest zbieżny i jego suma wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Przykład 4. Wyznacz pierwszy wyraz szeregu geometrycznego, znając jego iloraz i sumę:

$q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $S = 2\sqrt{2} + 2$.

Rozwiązanie:

Przekształcając wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$, otrzymujemy:

$a_1 = (1-q)S$.

Stąd, po podstawieniu podanych wartości, otrzymujemy:

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (2\sqrt{2} + 2) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $a_1 = \sqrt{2}$.

Przykład 5. Ułamek okresowy $0,(27)$ zamień na ułamek zwykły.

Rozwiązanie:

$$0,(27) = 0,272727\ldots = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \ldots =$$
$$= 27 \cdot 10^{-2} + 27 \cdot 10^{-4} + 27 \cdot 10^{-6} + \ldots$$

Ułamek ten stanowi sumę szeregu geometrycznego, w którym $a_1 = 27 \cdot 10^{-2}$ i $q = 10^{-2}$. Szereg ten jest więc zbieżny, bo $|q| < 1$, a jego suma wynosi:

$$S = 27 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Odpowiedź: $0,(27) = \frac{3}{11}$.

Przykład 6. Ułamek okresowy $1,02(37)$ zamień na ułamek zwykły.

Rozwiązanie:

Mamy $1,02(37) = 1,02 + 0,0037 + 0,000037 + 0,00000037 + \ldots =$
$= 1,02 + 37 \cdot 10^{-4} + 37 \cdot 10^{-6} + 37 \cdot 10^{-8} + \ldots$.

Suma tych wszystkich składników, poczynając od drugiego, jest sumą szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 37 \cdot 10^{-4}$ i ilorazie $q = 10^{-2}$. Szereg ten jest więc zbieżny, a jego suma $S = 37 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{37}{0,99} \cdot 10^{-4}$. Stąd:

$$1,02(37) = 1,02 + \frac{37}{9900} = \frac{10098 + 37}{9900} = \frac{10135}{9900} = \frac{2027}{1980}.$$

Odpowiedź: $1,02(37) = \frac{2027}{1980}$.

Pytania i zadania

1. Co to jest szereg geometryczny? Podaj przykłady szeregów geometrycznych.
2. Co to jest suma szeregu geometrycznego?
3. Podaj, kiedy szereg geometryczny jest:

   a) zbieżny; b) rozbieżny.

4. Podaj przykład szeregu geometrycznego:

   a) zbieżnego; b) rozbieżnego.

5. Oblicz sumy szeregów geometrycznych:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots;$ b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots;$ c) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots;$

d) $4+2\frac{2}{3}+1\frac{7}{9}+\ldots;$ e) $2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+\ldots;$ f) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+1+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\ldots;$

g) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots;$ h) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

6. Zamień na ułamki zwykłe następujące ułamki dziesiętne okresowe:

a) $0,(1)$; b) $3,(5)$; c) $0,(9)$; d) $1,2(3)$; e) $0,05(8)$;
f) $0,(36)$; g) $0,(12)$; h) $1,0(24)$; i) $0,(224)$; j) $3,5(001)$;
k) $0,11(6)$; l) $0,12(3)$; ł) $2,3(21)$; m) $0,(728)$.

7. Rozstrzygnij, czy zachodzą równości:

a) $0,(7)+0,(3)=1,(1)$; b) $0,(6)+0,(3)=1$;
c) $0,(72)+0,(27)=1$; d) $0,(9)+0,(2)=1,(2)$.

8*. Rozwiąż równania:

a) $x+4x^2+16x^3+\ldots=1$; b) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots=\frac{3x+1}{3}$;

c) $2x+4+\frac{8}{x}+\ldots=5x+3$; d) $\sqrt{x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\ldots}=4x-15$;

e) $1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}+\ldots=1-2x$; f) $x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\ldots=x-3$;

g) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\ldots=4+3\sqrt{x}.$

9*. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{x}{x+1}+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^3+\ldots<2$;

b) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots\leqslant 1.$

16. Szereg geometryczny w zadaniach

Ten podrozdział poświęcimy przykładom różnych zadań związanych z szeregiem geometrycznym.

Przykład 1. Gąsienica z trudem pełznie po pniu drzewa w górę, po linii prostej do najbliższej gałęzi. W pierwszej minucie przesuwa się o 5 dm, w drugiej o $2\frac{1}{2}$ dm, w trzeciej o $1\frac{1}{4}$ dm, w czwartej o $\frac{5}{8}$ dm itd. Do pierwszej gałęzi z liśćmi (stanowiącymi jej pożywienie) jest o ułamek centymetra dalej niż metr. Po ilu minutach gąsienica dopełznie do tej gałęzi?

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że długości kolejnych odcinków pnia drzewa, jakie pokonuje gąsienica, a więc liczby:

$$5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\ldots,$$

tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Jego pierwszym wyrazem jest $a_1 = 5$, a ilorazem liczba $q = \frac{1}{2}$. Ponieważ $|q| < 1$, więc ciąg ten jest zbieżny, jego suma zaś wynosi:

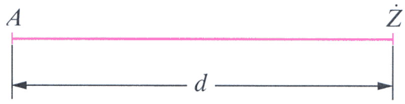
$$5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10.$$

Wynika z tego, że gąsienica nigdy nie dopełznie do gałęzi.

Przykład 2 (Zadanie Zenona z Elei, ok. 500 lat p.n.e.). Szybkonogi Achilles, znajdując się w odległości d metrów od żółwia, rozpoczął za nim pościg. Achilles poruszał się z prędkością w m/s, a żółw – z prędkością v m/s. Jaką drogę musi przebyć Achilles od chwili rozpoczęcia pościgu, by dogonić żółwia?

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że:



Ryc. 4.14.

1) Achilles przebiegnie drogę $A\dot{Z}$ w ciągu $\frac{d}{w}$ s,

2) żółw w tym czasie przebędzie drogę $v \cdot \frac{d}{w}$ m,

3) Achilles pokona drogę poprzednio przebytą przez żółwia w ciągu $\frac{vd}{w} : w = \frac{vd}{w^2}$ s,

4) żółw w tym czasie pokona $v \cdot \frac{vd}{w^2}$ m nowej drogi itd.

Widzimy, że czas trwania pościgu Achillesa za żółwiem jest równy sumie szeregu geometrycznego:

$$\frac{d}{w} + \frac{vd}{w^2} + \frac{v^2 d}{w^3} + \frac{v^3 d}{w^4} + \ldots,$$

o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{d}{w}$ i ilorazie $q = \frac{v}{w}$. Ponieważ $|q| < 1$, więc czas ten wynosi (zgodnie ze wzorem na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego) $\frac{d}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{w}} = \frac{d}{w - v}$ sekund.

Natomiast długość drogi, jaką przebył w tym czasie żółw, jest sumą szeregu geometrycznego:

$$\frac{vd}{w} + \frac{v^2 d}{w^2} + \frac{v^3 d}{w^3} + \frac{v^4 d}{w^4} + \ldots$$

o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{vd}{w}$ i ilorazie $q = \frac{v}{w}$, która wynosi $\frac{vd}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{w}} = \frac{dv}{w - v}$.

(Długość tej drogi można oczywiście obliczyć prościej, mianowicie mnożąc prędkość v, z jaką poruszał się żółw, przez czas $\frac{d}{w - v}$ trwania pościgu Achillesa).

Achilles, aby dogonić żółwia, musiał więc pokonać drogę długości $d + \frac{dv}{w - v} = \frac{dw}{w - v}$ metrów.

Uwaga. Gdyby założyć, że Achilles w chwili rozpoczęcia pościgu za żółwiem znajdował się w odległości 100 m od niego, oraz że poruszał się z prędkością 10 m/s, zaś żółw – z prędkością 0,1 cm/s, to:

$$\frac{dw}{w - v} = \frac{10000 \cdot 1000}{1000 - 0{,}1}\ \text{cm} = 10001\ \text{cm} \approx 100{,}01\ \text{m},$$

czyli okaże się, że Achilles dogoni żółwia po upływie około 10,001 s od chwili rozpoczęcia za nim pościgu.

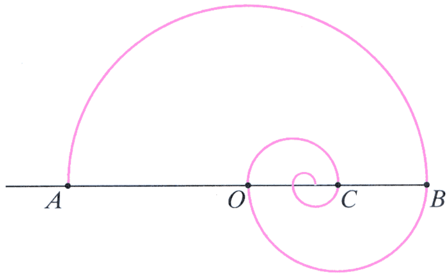
Przykład 3. Tworzymy linię spiralną w sposób pokazany na rycinie 4.15. Kreślimy półokrąg o średnicy $AB = 2r$. Do tego półokręgu dorysowujemy półokrąg o średnicy OB dwa razy krótszej od AB; następnie kreślimy półokrąg o średnicy OC dwa razy krótszej od OB itd. Jaka jest długość otrzymanej spirali?

Rozwiązanie:

Długości kreślonych półokręgów tworzą nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = \pi r$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Długość rozważanej spirali jest więc sumą:

$$\pi r + \frac{1}{2}\pi r + \frac{1}{4}\pi r + \frac{1}{8}\pi r + \ldots$$

zbieżnego szeregu geometrycznego. Suma ta, zgodnie z poznanym wzorem, wynosi $\frac{\pi r}{1 - 0{,}5} = 2\pi r$.



Ryc. 4.15.

Zatem długość tej spirali równa jest $2\pi r$, a więc długości okręgu o promieniu r.

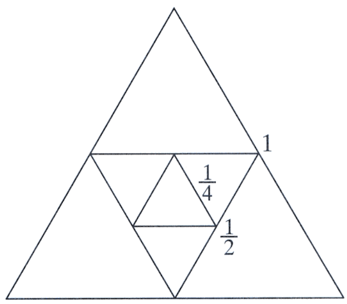
Odpowiedź: Długość otrzymanej spirali wynosi $2\pi r$.

Przykład 4. Dany jest trójkąt równoboczny T_1 o boku długości 1 (ryc. 4.16). W trójkąt ten wpisujemy trójkąt równoboczny T_2 o wierzchołkach w środkach boków trójkąta T_1. W trójkąt T_2 wpisujemy podobnie trójkąt równoboczny T_3, w ten zaś – trójkąt równoboczny T_4 itd. Oblicz sumę pól otrzymanego ciągu trójkątów T_1, T_2, T_3.

Rozwiązanie:

Trójkąty $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ mają boki o długości odpowiednio $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, więc ich pola, zgodnie ze znanym wzorem na pole $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ trójkąta równobocznego o boku długości a, tworzą nieskończony ciąg geometryczny:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{16}, \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{64}, \ldots,$$



Ryc. 4.16.

o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ i ilorazie $q = \frac{1}{4}$. Ponieważ $|q| < 1$, więc:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: Obliczana suma pól wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 5 (Zbiór Cantora). Odcinek długości 1 dzielimy na 3 równe części i usuwamy środkowy odcinek otwarty (tzn. bez końców). Sumę długości pozostałych odcinków oznaczamy przez c_1. Następnie każdy z tych odcinków ponownie dzielimy na 3 równe części i usuwamy środkowy odcinek otwarty, otrzymując odcinki, których sumę długości oznaczamy przez c_2 itd. Oblicz sumę $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$.

Rozwiązanie:

Rozważmy opisywany zbiór na osi liczbowej (ryc. 4.17).

Ryc. 4.17.

Bez trudu zauważymy, że:

1. c_1 jest sumą długości przedziałów: $\left\langle 0; \frac{1}{3} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{2}{3}; 1 \right\rangle$, a więc $c_1 = \frac{2}{3}$;
2. c_2 jest sumą długości przedziałów: $\left\langle 0; \frac{1}{9} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{9}; \frac{1}{3} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{3}; \frac{7}{9} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{8}{9}; 1 \right\rangle$, czyli $c_2 = \frac{4}{9}$;
3. c_3 jest sumą długości przedziałów: $\left\langle 0; \frac{1}{27} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{27}; \frac{1}{9} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{9}; \frac{7}{27} \right\rangle, \left\langle \frac{8}{27}; \frac{1}{3} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{3}; \frac{19}{27} \right\rangle, \left\langle \frac{20}{27}; \frac{7}{9} \right\rangle,$ $\left\langle \frac{8}{9}; \frac{25}{27} \right\rangle, \left\langle \frac{26}{27}; 1 \right\rangle$, tak więc $c_3 = \frac{8}{27}$ itd.

Wobec tego poszukiwana suma $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$ jest sumą szeregu geometrycznego: $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$.

Szereg ten jest zbieżny, gdyż jego obrazem q jest liczba z przedziału $(-1; 1)$, mianowicie $q = \frac{2}{3}$. Zatem zgodnie ze wzorem na sumę takiego szeregu otrzymujemy:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

Odpowiedź: Obliczana suma wynosi 2.

Przykład 6. Wyznacz szereg geometryczny, którego suma jest równa $\frac{3}{2}$, a suma kwadratów wyrazów tego szeregu wynosi $\frac{9}{8}$.

Rozwiązanie:

Należy wyznaczyć wyraz pierwszy a_1 i iloraz q szukanego szeregu. Ponieważ, z założenia, szereg ten jest zbieżny, więc $|q| < 1$. W takim razie szereg o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2 też jest zbieżny. Z treści zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{a_1^2}{1-q^2} = \dfrac{9}{8}. \end{cases}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $a_1 = 1, q = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

Przykład 7. Dla jakich wartości x szereg geometryczny:

$1 + (2 - x^2) + (2 - x^2)^2 + (2 - x^2)^3 + \ldots$ jest zbieżny?

Rozwiązanie:

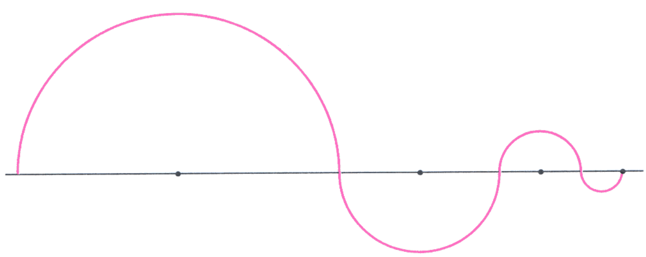
Mamy $a_1 = 1, q = 2 - x^2$. Szereg ten jest zbieżny, gdy $|q| < 1$. Otóż:

$$|2 - x^2| < 1 \iff -1 < 2 - x^2 < 1 \iff 1 < x^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: $x \in (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3})$.

Pytania i zadania

1. Znajdź iloraz zbieżnego szeregu geometrycznego, w którym $a_1 = 2$, zaś suma jego wyrazów jest 3 razy mniejsza od sumy kwadratów tych wyrazów.
2. Suma wyrazów szeregu geometrycznego wynosi $\frac{3}{2}$, a suma jego wyrazów o wskaźnikach nieparzystych wynosi 1. Wyznacz ten szereg.
3. Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1 + (x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 3x + 1)^2 + (x^2 - 3x + 1)^3 + \ldots$ jest zbieżny?
4. Dla jakiej wartości x składniki sumy $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \ldots$ są kolejnymi wyrazami zbieżnego szeregu geometrycznego?
5. Udowodnij, że jeżeli $|q| < 1$, to $(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)(1 - q + q^2 - q^3 + \ldots) = \frac{1}{1 - q^2}$.
6. (Dywan Sierpińskiego). Kwadrat K o boku długości 1 dzielimy prostymi równoległymi do boków kwadratu na 9 przystających kwadratów i usuwamy wnętrze środkowego kwadratu. Pozostałą figurę oznaczamy przez F_1. Tworzymy ciąg nieskończony figur F_n. Figurę F_n otrzymujemy z figury F_{n-1} w ten sposób, że każdy z kwadratów, których sumą jest figura F_{n-1}, dzielimy na 9 kwadratów przystających i usuwamy wnętrze każdego środkowego kwadratu. Figura F_n jest sumą pozostałych kwadratów.
   a) Nakreśl kilka początkowych figur ciągu (F_n).
   b) Przez P_n i S_n oznaczamy pola odpowiednio figur F_n i $F_{n-1} - F_n$. Znajdź $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$.
7. W okrąg o środku O i promieniu długości r wpisano sześciokąt foremny $AA_1A_2A_3A_4A_5$. Z wierzchołka A poprowadzono prostopadłą do OA_1. Z punktu B_1 przecięcia się tej prostopadłej z OA_1 poprowadzono prostopadłą do OA_2, a z punktu B_2 przecięcia się tej prostopadłej z OA_2 poprowadzono prostopadłą do OA_3 itd. Oblicz sumę długości nieskończonego ciągu wszystkich utworzonych w ten sposób odcinków: $AB_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots$.
8. W trójkąt równoboczny o boku długości 1 wpisano koło, a następnie wpisano trzy koła styczne do danego koła i boków danego trójkąta. Czynność tę powtórzono nieskończenie wiele razy. Oblicz sumę pól wpisanych kół.
9. Dany jest trójkąt równoboczny T_1 o boku długości 1. W trójkąt ten wpisujemy trójkąt równoboczny T_2 w ten sposób, że każdy wierzchołek trójkąta T_2 należy do innego boku trójkąta T_1, a kąt ostry między bokami trójkątów T_1 i T_2 wynosi 30°. W trójkąt T_2 wpisujemy podobnie trójkąt T_3 itd. Oblicz sumę nieskończonego ciągu pól wszystkich utworzonych w ten sposób trójkątów.
10. Oblicz długości linii składającej się z nieskończonej liczby półokręgów o średnicach długości odpowiednio: $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \ldots$ (ryc. 4.18).


Ryc. 4.18.

V. Związki miarowe w trójkącie

W klasie pierwszej poznaliśmy zależności między długościami boków i miarami kątów trójkąta prostokątnego. Stosując funkcje trygonometryczne dowolnego kąta i twierdzenie Pitagorasa, potrafimy rozwiązać dowolny trójkąt prostokątny. Określenie **rozwiązać trójkąt** oznacza: znaleźć pewne jego elementy, mając dane pozostałe. Na przykład znając miary kątów i długość jednego z boków trójkąta prostokątnego, umiemy obliczyć długości pozostałych boków.

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenia pozwalające rozwiązać dowolny trójkąt. Formułując twierdzenia, będziemy korzystać z tak zwanych oznaczeń standardowych (ryc. 5.1):

a, b, c – długości boków trójkąta,

α, β, γ – miary kątów trójkąta,

przy czym:

α – miara kąta leżącego naprzeciwko boku o długości a,

β – miara kąta leżącego naprzeciwko boku o długości b,

γ – miara kąta leżącego naprzeciwko boku o długości c,

r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt,

R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie,

S – pole trójkąta,

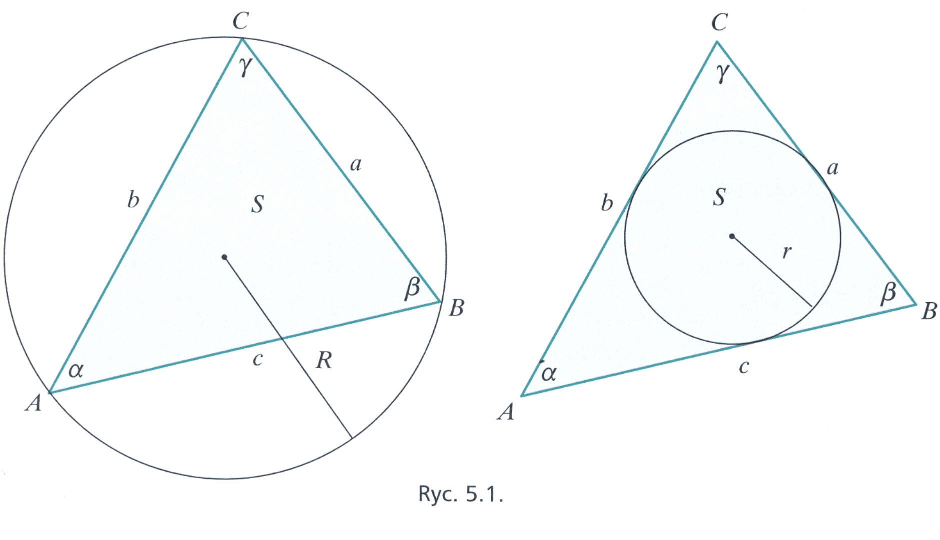
p – połowa obwodu trójkąta.

Wierzchołki trójkąta oznaczać będziemy dużymi literami alfabetu łacińskiego, najczęściej – odpowiadającymi małym literom tego alfabetu:

A – wierzchołek leżący naprzeciwko boku o długości a,

B – wierzchołek leżący naprzeciwko boku o długości b,

C – wierzchołek leżący naprzeciwko boku o długości c.



Ryc. 5.1.

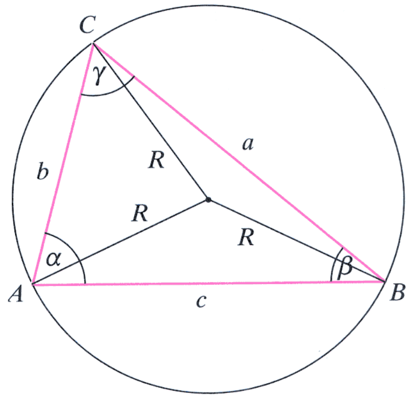
1. Twierdzenie sinusów i jego zastosowania

Twierdzenie

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów miar przeciwległych kątów są takie same i równają się długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie to można zapisać następująco (ryc. 5.2):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$



Ryc. 5.2.

☐ Dowód. Udowodnimy równość $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

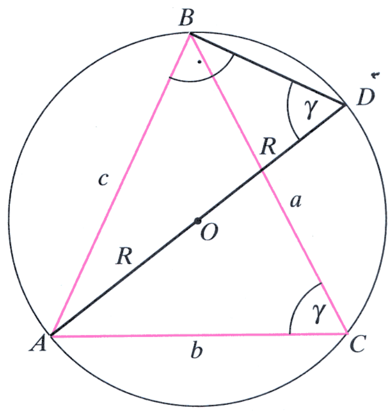
Dowody równości: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$

są analogiczne.

Rozróżniamy trzy przypadki w zależności od tego, czy: $\gamma < 90^\circ, \gamma = 90^\circ, \gamma > 90^\circ$.

Przypadek 1: $\gamma < 90^\circ$, przedstawiony na rycinie 5.3.

Przez wierzchołek A prowadzimy średnicę i jej koniec D łączymy z wierzchołkiem B. Powstały trójkąt ABD jest prostokątny o kącie prostym ABD (kąt wpisany oparty na średnicy), natomiast kąt ADB równy jest kątowi ACB (są to kąty wpisane, oparte na tym samym łuku). Wobec tego w trójkącie ABD z definicji sinusa:



Ryc. 5.3.

$\sin\gamma = \frac{c}{AD}$, czyli:

$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, bo $AD = 2R$.

Stąd: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Przypadek 2: $\gamma = 90^\circ$, przedstawiony na rycinie 5.4.

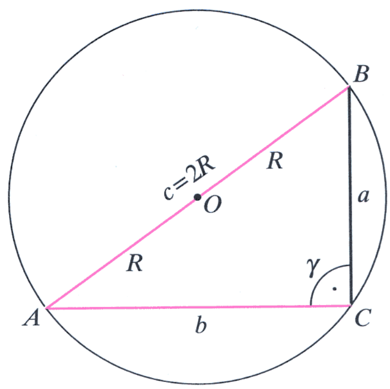
W tym przypadku $\sin\gamma = 1$ oraz $c = 2R$.

Zatem:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{1} = c = 2R,$$

czyli rzeczywiście i tutaj:

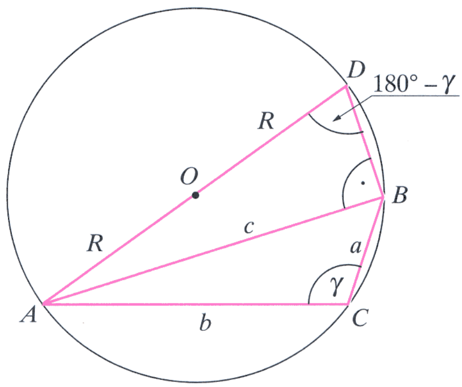
$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$



Ryc. 5.4.

Przypadek 3: $\gamma > 90^\circ$, przedstawiony na rycinie 5.5.

Podobnie jak w pierwszym przypadku prowadzimy przez wierzchołek A średnicę i jej koniec D łączymy z wierzchołkiem B. Wówczas powstały trójkąt ABD jest prostokątny o kącie prostym przy wierzchołku B. W trójkącie tym kąt ADB ma miarę $180^\circ - \gamma$, gdyż kąty ADB i ACB, jako wpisane i oparte na łukach uzupełniających się do całego okręgu, uzupełniają się do kąta półpełnego. Wobec tego w trójkącie ABD z definicji sinusa:



Ryc. 5.5.

$\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{c}{2R}$, stąd:

$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, bo $\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \sin\gamma$,

i ostatecznie $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Podamy teraz wiele zastosowań tego twierdzenia, w tym głównie do rozwiązywania trójkątów i zadań na dowodzenie.

Rozwiązywanie trójkątów

Elementami trójkąta są, jak wiemy, jego boki i kąty. Ich miary będziemy tu nazywać po prostu elementami i oznaczać standardowo. Tak więc długość boku a oznaczać będziemy przez a, miarę kąta α przez α itd.

Przypomnijmy jeszcze na wstępie, że:

1. Kąty α, β, γ dowolnego trójkąta spełniają równość $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
2. Boki a, b, c dowolnego trójkąta spełniają nierówności: $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$.

Podstawowymi przypadkami rozwiązywania trójkątów nazywamy zadania na obliczanie trzech elementów trójkąta przy danych trzech jego elementach, w tym co najmniej jednym boku.

Są cztery takie przypadki, gdy dane są:

1. Bok i dwa kąty, na przykład: a, β, γ.
2. Dwa boki i kąt naprzeciw jednego z nich, na przykład: a, b, α.
3. Dwa boki i kąt między nimi, na przykład: a, b, γ.
4. Trzy boki: a, b, c.

Na podstawie twierdzenia sinusów i twierdzenia o sumie kątów trójkąta można rozwiązać trójkąt w każdym z wymienionych przypadków.

Przykład 1. Rozwiąż trójkąt, w którym dane są: bok a oraz kąty β i γ.

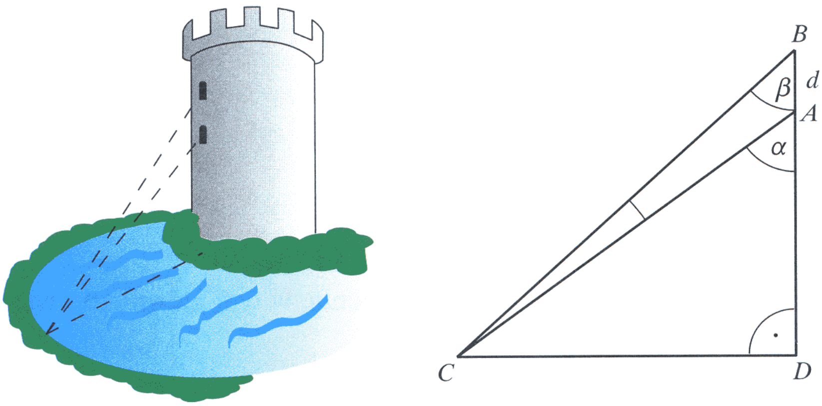
Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc $\alpha = 180^\circ - \left(\beta + \gamma\right)$; z twierdzenia sinusów otrzymujemy natomiast:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{oraz} \quad c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Zadanie to ma zawsze jedno rozwiązanie, jeśli tylko $\beta + \gamma < 180^\circ$.

Przykład 2. Na brzegu rzeki wznosi się wieża z dwoma pionowymi otworami, umieszczonymi jeden pod drugim, których środki są oddalone o d. Linie poprowadzone ze środków otworów do miejsca położonego na drugim brzegu rzeki, najbliższego podstawy wieży, tworzą z pionem wyznaczonym oknami kąty α i β. Wyznacz szerokość rzeki.
Rozwiązanie:

Zagadnienie sprowadza się (w uproszczeniu) do takiego oto zadania geometrycznego: Dany jest trójkąt prostokątny CDB o kącie prostym przy wierzchołku D (ryc. 5.6) i kącie CBD równym β. Na boku DB obrano taki punkt A, że $AB = d$, $\sphericalangle CAD = \alpha$. Wyznacz CD.



Ryc. 5.6.

W trójkącie ACD zachodzi równość $CD = CA \cdot \sin\alpha$. Ponieważ α jest kątem zewnętrznym trójkąta CAB, więc $\sphericalangle BCA = \alpha - \beta$.

Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do tego trójkąta otrzymujemy równość:

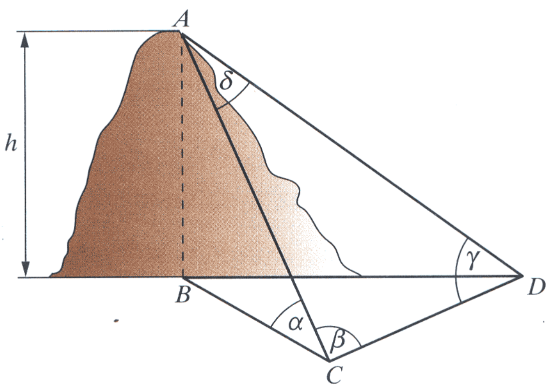
$$\frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{CA}{\sin\beta}, \text{ skąd } CA = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Wobec tego $CD = CA \cdot \sin\alpha = \dfrac{d\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Przykład 3. Aby wyznaczyć wysokość góry, zmierzono odcinek CD oraz kąty ACD i ADC. Jaka jest wysokość tej góry?
Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia jak na rycinie 5.7. Wówczas w trójkącie ACD znajdujemy kąt $\delta = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do tego trójkąta otrzymujemy:

$$\frac{AC}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin\delta}, \text{ skąd } AC = CD \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}.$$



Ryc. 5.7.

Szukaną wysokość h wyznaczamy z trójkąta prostokątnego ABC:

$\frac{h}{AC} = \sin\alpha$, skąd $h = AC \cdot \sin\alpha$.

Wobec tego $h = CD \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin\delta}$.

Przykład 4. Rozwiąż trójkąt, w którym są dane boki a, b i kąt α.
Rozwiązanie:

Korzystamy z twierdzenia sinusów i związku między kątami trójkąta:

$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$ i $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ oraz:

$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Widzimy przy tym, że zadanie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b}{a}\sin\alpha \leqslant 1$, czyli gdy a, b, α są tak dobrane, że $b\sin\alpha \leqslant a$.

Przykład 5. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma 60°. Boki BC i AC są długości odpowiednio 1 i $\sqrt{3}$. Wyznacz długość trzeciego boku.
Rozwiązanie:

Z twierdzenia sinusów $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$, skąd $\sin A = \frac{BC}{CA} \cdot \sin B$. Po podstawieniu $B = 60^\circ$, $BC = 1, CA = \sqrt{3}$ otrzymujemy $\sin A = \frac{1}{2}$. Wobec tego $A = 30^\circ$ (kąt A nie może mieć miary 150°, gdyż wtedy $\sphericalangle A + \sphericalangle B > 180^\circ$).

Skoro $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, to $C = 90^\circ$. Trójkąt ABC jest więc prostokątny. Gdy zastosujemy do niego twierdzenie Pitagorasa, otrzymamy:

$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

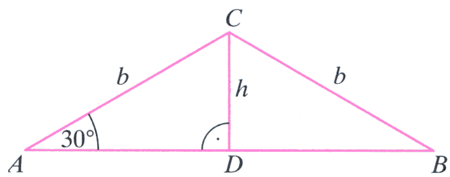
Odpowiedź: Trzeci bok ma długość 2.

Przykład 6. Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest równy 30°, a suma długości ramienia i wysokości wynosi 10.
Rozwiązanie:

W zadaniu nie podano, o którą wysokość chodzi.
Trzeba zatem rozpatrzyć dwa przypadki:

1. Przypadek, gdy wysokość jest opuszczona na podstawę (ryc. 5.8).

W trójkącie ACD mamy wówczas $\frac{h}{b} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, skąd $h = \frac{1}{2}b$.



Ryc. 5.8.

Wiemy też, że $b + h = 10$, wobec tego $b + \frac{1}{2}b = 10$, czyli $b = \frac{20}{3}$ i $h = \frac{10}{3}$.

Z twierdzenia sinusów $\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = 2b = \frac{40}{3}$.

Stąd $AB = \frac{40}{3} \cdot \sin C = \frac{40}{3} \cdot \sin 120^\circ = \frac{40}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{40}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Wobec tego pole trójkąta ABC jest równe:

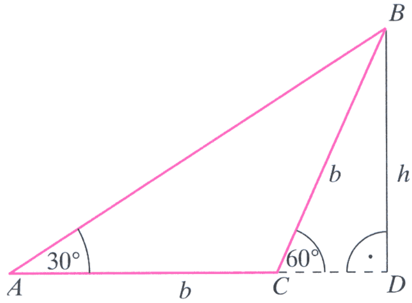
$$\frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100\sqrt{3}}{9}.$$

2. Przypadek, gdy wysokość jest opuszczona na przedłużenie ramienia (ryc. 5.9).

Wtedy w trójkącie BCD mamy $\frac{h}{b} = \sin 60^\circ$, skąd $h = b\sin 60^\circ = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Po podstawieniu tej wartości do równania $b + h = 10$ otrzymujemy $b + \frac{b\sqrt{3}}{2} = 10$, skąd kolejno:

$\frac{b}{2}\left(2+\sqrt{3}\right) = 10,\ b\left(2+\sqrt{3}\right) = 20,$

i wreszcie $b = 20\left(2-\sqrt{3}\right)$.



Ryc. 5.9.

Wówczas $h = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Zatem w tym przypadku trójkąt ABC ma pole równe:

$$\frac{1}{2} \cdot 20\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot 10\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = 100\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

Odpowiedź: Pole trójkąta ABC wynosi $\frac{100\sqrt{3}}{9}$ lub $100\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

Zastosowania twierdzenia sinusów do zadań na dowodzenie

Przykład 1. Wykaż, że pole S trójkąta o bokach a, b, c można wyrazić wzorem

$$S = \frac{abc}{4R},$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.10.

Wiemy, że $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

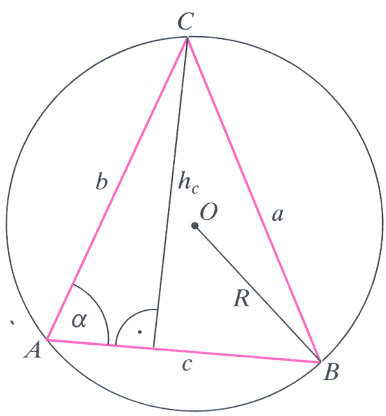
Ponieważ $\frac{h_c}{b} = \sin\alpha$, stąd $h_c = b\sin\alpha$.

Wobec tego:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Z twierdzenia sinusów: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, skąd $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, więc:

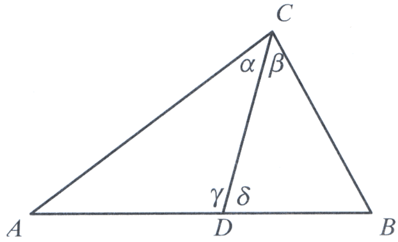
$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$



Ryc. 5.10.

Przykład 2. Udowodnij, że w każdym trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne odpowiednio do boków przyległych.
Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.11. Mamy dowieść, że jeżeli $\alpha = \beta$, to $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$. Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkątów ADC i DBC otrzymujemy: $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\gamma}$ oraz $\frac{DB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\delta}$, skąd po podzieleniu tych równości stronami:



Ryc. 5.11.

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}.$$

A ponieważ $\sin\alpha = \sin\beta$ i $\sin\delta = \sin\gamma$, więc rzeczywiście $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

Uwaga. Udowodniliśmy poznane w klasie pierwszej twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie, wykazane wtedy z zastosowaniem twierdzenia Talesa.

Przykład 3. Wykaż, że jeżeli dwusieczna kąta zewnętrznego trójkąta przecina przedłużenie przeciwległego boku, to dzieli ona odpowiednio ten bok w stosunku przeciwnym do stosunku pozostałych boków.
Rozwiązanie:

Zachowując wszystkie oznaczenia podane na poprzedniej rycinie 5.11, wprowadźmy na rycinie 5.12 jeszcze kilka nowych oznaczeń.

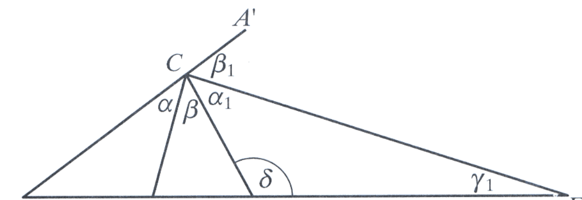
Przy tych oznaczeniach wystarczy wykazać, że jeżeli $\alpha_1 = \beta_1$, to:

$$(*)\ \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}.$$

Ponieważ kąty $\alpha + \beta$ i $\alpha_1 + \beta_1$ są przyległe, więc ich dwusieczne są prostopadłe. Zatem $\alpha_1 + \beta = 90^\circ$. Po zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkątów AEC i BEC otrzymujemy:

$$\frac{AE}{\sin(\alpha + \beta + \alpha_1)} = \frac{AC}{\sin\gamma_1} \text{ oraz:}$$

$$\frac{BE}{\sin\alpha_1} = \frac{BC}{\sin\gamma_1}.$$



Ryc. 5.12.

Po podzieleniu tych[1] równości stronami otrzymujemy równość:

$$(**)\ \frac{AE}{BE} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha + \beta + \alpha_1)} = \frac{AC}{BC}.$$

[1] Zakładamy, że występujące w tych równościach stosunki mają sens, to znaczy, że $\sin(\alpha + \beta + \alpha_1) \neq 0$, $\sin\gamma_1 \neq 0$, $\sin\alpha_1 \neq 0$. Tak jest rzeczywiście, bo zawsze $\alpha \neq 90^\circ$ ($\alpha + \beta$ jest kątem trójkąta, więc $\alpha + \beta < 180^\circ$); zaś $\sin\gamma_1 \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_1 \neq 0^\circ$ i $\gamma_1 \neq 180^\circ$. Ponieważ $\gamma_1 + \delta = 90^\circ$, więc $\gamma_1 \neq 180^\circ$. Gdyby zaś $\gamma_1 = 0^\circ$, wtedy $\delta = 90^\circ$, to zaś jest możliwe tylko w przypadku, gdy $AC = BC$. Z kolei wówczas dwusieczna kąta BCA', jako równoległa do prostej AB, nie mogłaby się z nią przecinać.

Ponieważ $\alpha_1 + \beta = 90^\circ$ i $\beta = \alpha$, więc $\sin(\alpha + \beta + \alpha_1) = \cos\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha_1) =$ $= \sin\alpha_1$ i wobec tego $\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha + \beta + \alpha_1)} = 1$, skąd z równości $(**)$ otrzymujemy dowodzoną równość $(*)$.

Przykład 4. Udowodnij, że jeżeli kąty α, β, γ pewnego trójkąta spełniają warunek $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia sinusów wynikają równości:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, skąd $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

Po podstawieniu tych wartości do podanej równości otrzymujemy: $\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$, czyli równość $a^2 + b^2 = c^2$, która dowodzi, że trójkąt ten jest prostokątny.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie sinusów.
2. Co to znaczy rozwiązać trójkąt?
3. Udowodnij, że jeżeli α i β są kątami dowolnego trójkąta, to $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.
4. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, w którym dane są: $a = 4\sqrt{7}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.
5. Wyznacz miary kątów trójkąta, w którym wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części.
6. Wyraź pole trójkąta w zależności od długości jednego z jego boków i miar kątów doń przyległych.

7*. Trójkąty ABC i DEF wpisano w ten sam okrąg. Udowodnij, że równość obwodów tych trójkątów jest równoważna równości sum sinusów ich kątów wewnętrznych.

8. W trójkącie ABC dane są: $AB = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
9. W trójkącie ABC dane są: $AB = 2$, $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 30^\circ$. Oblicz AC.
10. W trójkącie ABC dane są: $AB = 8$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.
11. Dwa spośród kątów trójkąta mają miary α i β, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest długości R. Oblicz obwód tego trójkąta.
12. Na prostej przechodzącej przez podstawę wieży wyznaczono takie dwa punkty A i B, że $AB = 20$ m. Z punktu A wierzchołek wieży widać pod kątem 75°, a z punktu B – pod kątem 45°. Jak wysoka jest ta wieża?
13. Pod jakim kątem względem prądu rzeki sternik kieruje łódź, jeśli płynie ona po prostej tworzącej z kierunkiem prądu rzeki kąt 30°, prędkość prądu rzeki wynosi 1 m/s, a prędkość własna łodzi 1,5 m/s?

14*. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie zachodzi równość $a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta = c \cdot \sin\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.

15*. Udowodnij, że jeżeli kwadraty sinusów kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to kwadraty odpowiednich boków tego trójkąta również tworzą ciąg arytmetyczny.

2. Twierdzenie cosinusów (Carnota) i wnioski z tego twierdzenia

Poznamy teraz kolejny ważny związek, w jakim pozostają elementy każdego trójkąta. Przedtem jednak udowodnijmy następujące twierdzenie pomocnicze (lemat).

Lemat. W każdym trójkącie ABC zachodzą równości:

(1) $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$,

(2) $b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A$,

(3) $c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$.

(Pamiętajmy, że oznaczenia w powyższym lemacie są standardowe).

□ Dowód. Opuśćmy w trójkącie ABC wysokości AD, BE i CF oraz oznaczmy długości odcinków AF, FB, BD, DC, CE i EA odpowiednio przez x, y, z, t, u i v.

1. Gdy trójkąt ABC jest ostrokątny (ryc. 5.13), wówczas z definicji sinusa i cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym wynikają związki:

   $x = b \cdot \cos A,\ y = a \cdot \cos B,$

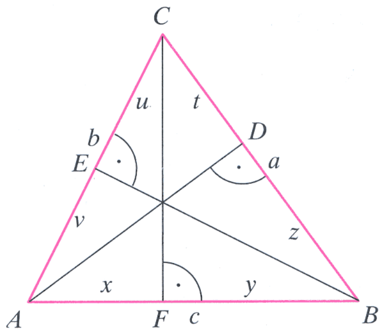
   $z = c \cdot \cos B,\ t = b \cdot \cos C,$

   $u = a \cdot \cos C,\ v = c \cdot \cos A,$ skąd:

   $c = x + y = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B,$

   $a = z + t = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C,$

   $b = u + v = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A.$



Ryc. 5.13.

2. Gdy trójkąt ABC jest prostokątny, o kącie prostym na przykład przy wierzchołku C (ryc. 5.14), wtedy:

   $x = b \cdot \cos A,\ y = a \cdot \cos B,$

   $z = c \cdot \cos B,\ t = 0 = b \cdot \cos C,$

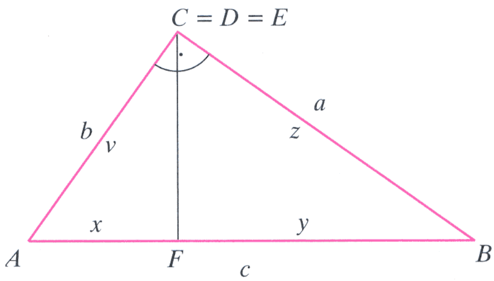
   $u = 0 = a \cdot \cos C,\ v = c \cdot \cos A,$

   skąd:

   $c = x + y = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B,$

   $a = z = c \cdot \cos B = c \cdot \cos B + 0 = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C,$

   $b = v = 0 + v = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A.$



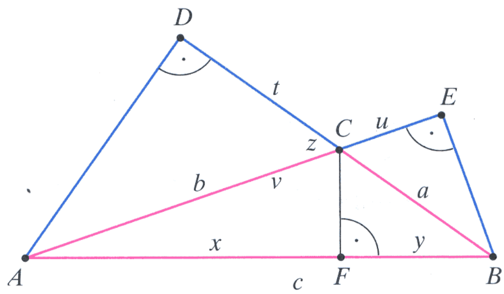
Ryc. 5.14.

3. Gdy trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku C (ryc. 5.15), wówczas:

   $x = b \cdot \cos A,\ y = a \cdot \cos B,$

   skąd:

   $c = x + y = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$, z kolei zaś:



Ryc. 5.15.

$z = BD = c \cdot \cos B$,

$t = CD = b \cdot \cos(180° - C) = -b \cdot \cos C$, więc:

$a = BD - CD = c \cdot \cos B - (-b \cdot \cos C) = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$. I dalej:

$u = CE = a \cdot \cos(180° - C) = -a \cdot \cos C$ i $v = AE = c \cdot \cos \cdot A$, skąd:

$b = AE - CE = c \cdot \cos A - (-a \cdot \cos C) = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$.

Tym samym lemat został udowodniony. ▢

Pora na zapowiedziane twierdzenie:

Twierdzenie cosinusów (Carnota)

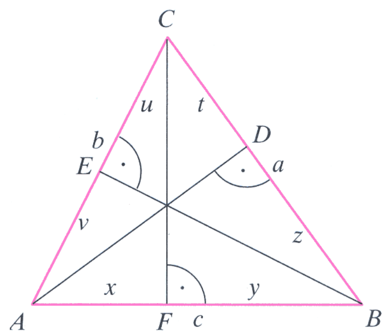
W każdym trójkącie kwadrat długości jednego boku równa się sumie kwadratów długości pozostałych boków zmniejszonej o podwojony iloczyn ich długości i cosinusa miary kąta zawartego między tymi bokami.

Przy standardowych oznaczeniach w trójkącie ABC (ryc. 5.16) otrzymujemy równości:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$,

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$,

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Ryc. 5.16.

▢ Dowód. Z udowodnionego wyżej lematu wiemy, że:

$(*)\ a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$,

$(**)\ b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A$,

$(***)\ c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$.

Wyznaczmy z równości $(**)$ $\cos C$, a z równości $(***)$ $\cos B$:

$$\cos C = \frac{b - c \cdot \cos A}{a} \text{ i } \cos B = \frac{c - b \cdot \cos A}{a}.$$

Po podstawieniu tych wartości do równości $(*)$ otrzymujemy równość:

$$a = c \cdot \frac{c - b \cdot \cos A}{a} + b \cdot \frac{b - c \cdot \cos A}{a},$$ a stąd równość:

$a^2 = c^2 - bc \cdot \cos A + b^2 - bc \cdot \cos A$, czyli równość:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Podobnie dowodzimy równości (2) i (3). ▢

Po przeanalizowaniu równości $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ stwierdzamy, że:

– kąt A jest ostry wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 < b^2 + c^2$;

– kąt A jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 = b^2 + c^2$;

– kąt A jest rozwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 > b^2 + c^2$.

Po rozważeniu podobnej równości:

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ i $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

dochodzimy do następującego wniosku:

Wniosek. Trójkąt o bokach o długości a, b, c jest:

– ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 < b^2 + c^2$ i $b^2 < c^2 + a^2$, i $c^2 < a^2 + b^2$;

– prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 = b^2 + c^2$ lub $b^2 = c^2 + a^2$, lub $c^2 = a^2 + b^2$;

– rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 > b^2 + c^2$ lub $b^2 > c^2 + a^2$, lub $c^2 > a^2 + b^2$.

W przypadku, gdy któryś z kątów trójkąta jest prosty, otrzymujemy twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie Pitagorasa jest więc szczególnym przypadkiem twierdzenia cosinusów.

Twierdzenie cosinusów ma wiele zastosowań.

Zastosowania twierdzenia cosinusów do rozwiązywania trójkątów

Twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczania długości boku trójkąta, gdy dane są długości pozostałych boków i kąt zawarty między nimi, oraz do wyznaczania miar kątów trójkąta przy danych długościach jego boków.

Przykład 1. Oblicz długość boku BC trójkąta ABC, w którym boki AB i AC są długości odpowiednio 2 i $4\sqrt{2}$, a kąt BAC ma 45°.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle BAC) =$$

$$= 2^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 4 + 32 - 16\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= 36 - 16 = 20, \text{ skąd:}$$

$$BC = 2\sqrt{5}.$$

Odpowiedź: Długość boku $BC = 2\sqrt{5}$.

Przykład 2. Boki a, b, c trójkąta mają długości odpowiednio 2, 4 i $2\sqrt{7}$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Po przekształceniu wzorów cosinusów otrzymujemy:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

skąd, po podstawieniu $a = 2$, $b = 4$ i $c = 2\sqrt{7}$, wynika:

$$\cos A = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \quad \cos B = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \cos C = -\frac{1}{2}, \quad \text{czyli że:}$$

$$A \approx 19^\circ 06', \; B \approx 40^\circ 54' \text{ i } C = 120^\circ$$

(co można obliczyć za pomocą kalkulatora).

Odpowiedź: Miary kątów tego trójkąta wynoszą: $A \approx 19^\circ 06'$, $B \approx 40^\circ 54'$, $C = 120^\circ$.

Przykład 3. Wyznacz długości przekątnych równoległoboku o bokach długości $4\sqrt{3}$ i $2\sqrt{3}$ oraz kącie między nimi wynoszącym 60°.

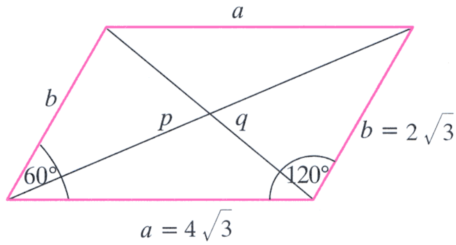
Rozwiązanie:

Stosując twierdzenie cosinusów, obliczamy (ryc. 5.17):

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= 16 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 16 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 48 + 12 + 24 = 84,$$



Ryc. 5.17.

skąd $p = 2\sqrt{21}$, a następnie:

$$q^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60^\circ = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36, \text{ skąd:}$$

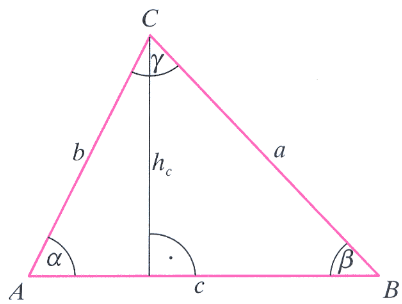
$$q = 6.$$

Odpowiedź: Przekątne tego równoległoboku mają długości $2\sqrt{21}$ i 6.

Przykład 4. Oblicz pole S trójkąta, mając dane długości a, b, c jego boków.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, przy czym $h_c = b \sin\alpha$. Na rycinie 5.18 mamy przypadek, gdy $\alpha < 90^\circ$; w przypadku gdy $\alpha = 90^\circ$, wtedy $h_c = b = b \cdot 1 = b \sin 90^\circ$; gdy wreszcie $\alpha > 90^\circ$, wtedy $h_c = b \sin\left(180^\circ - \alpha\right) = b \sin\alpha$, bo $\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$.



Ryc. 5.18.

Wobec tego pole S możemy wyrazić wzorem $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$.

Ponieważ na mocy twierdzenia cosinusów $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, zaś $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, więc:

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{\left(2bc\right)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{\left(2bc\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{\left(2bc\right)^2} =$$

$$= \frac{\left[a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right)\right] \cdot \left[\left(b^2 + 2bc + c^2\right) - a^2\right]}{\left(2bc\right)^2} =$$

$$=\frac{\left[a^2-(b-c)^2\right]\cdot\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(2bc)^2}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{(2bc)^2}=$$

$$=\frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)\cdot 2p}{(2bc)^2}= \qquad \text{(gdzie } 2p=a+b+c\text{)}$$

$$=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4(bc)^2}=\left(\frac{2}{bc}\right)^2\cdot p(p-a)(p-b)(p-c).$$ Stąd:

$\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, czyli:

$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ i ostatecznie $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Powyższy wzór na pole trójkąta nosi nazwę **wzoru Herona**.

Przykład 5.** Mając dane długości boków a, b, c, d czworokąta wpisanego w okrąg, oblicz jego pole S.

Rozwiązanie:

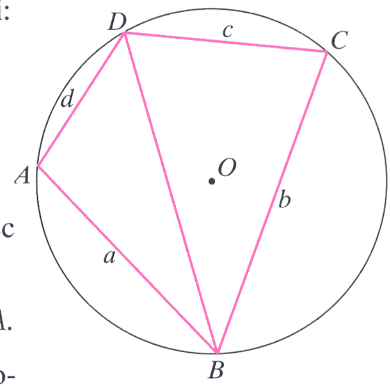
W czworokącie tym przeciwległe kąty uzupełniają się do kąta półpełnego, więc $A+C=B+D=180°$. Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów do trójkątów ABD i BCD (ryc. 5.19) otrzymujemy równości $BD^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos A$ i $BD^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos C$, skąd:

$a^2+d^2-2ad\cdot\cos A=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(180°-A)$, czyli:

$a^2+d^2-2ad\cdot\cos A=b^2+c^2+2bc\cdot\cos A$,

$2(bc+ad)\cdot\cos A=a^2+d^2-b^2-c^2$ i ostatecznie:

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$



Ryc. 5.19.

Pole S jest sumą pól rozważanych trójkątów, wobec czego:

$$S=\frac{1}{2}ad\cdot\sin A+\frac{1}{2}bc\cdot\sin(180°-A)=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A.$$

Ponieważ $\sin^2 A=1-\cos^2 A$, więc dalej otrzymujemy kolejno:

$$\sin^2 A=1-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)^2=\frac{(2(ad+bc))^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{(2(ad+bc))^2}=$$

$$=\frac{(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)}{(2(ad+bc))^2}=$$

$$=\frac{\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]\cdot\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]}{\left(2(ad+bc)\right)^2}=$$

$$=\frac{(b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c)}{\left(2(ad+bc)\right)^2}=$$

$$=\frac{(2p-2a)(2p-2d)(2p-2b)(2p-2c)}{\left(2(ad+bc)\right)^2}= \quad (\text{gdzie } 2p=a+b+c+d)$$

$$=4\cdot\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad+bc)^2}.\ \text{Wówczas:}$$

$$S^2=\frac{1}{4}(ad+bc)^2\cdot\sin^2 A=\frac{1}{4}\cdot(ad+bc)^2\cdot 4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad+bc)^2},\ \text{skąd:}$$

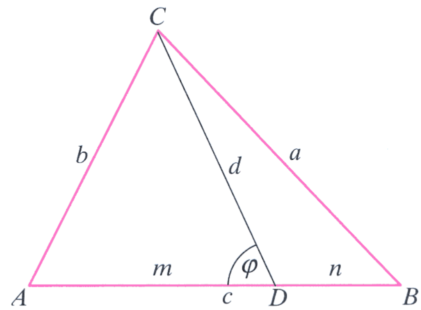
$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\ \text{i ostatecznie:}$$

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Przykład 6*. W trójkącie ABC poprowadzono z wierzchołka C do boku AB odcinek CD ($D \in AB$). Znajdź długość tego odcinka, mając dane długości boków trójkąta ABC oraz długości odcinków AD i DB.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.20. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów ADC i DBC wynikają równości:



Ryc. 5.20.

(1) $b^2=m^2+d^2-2md\cdot\cos\varphi$;

(2) $a^2=n^2+d^2-2nd\cdot\cos(180^\circ-\varphi)=n^2+d^2+2nd\cdot\cos\varphi$.

Pomnożywszy obie strony równości (1) przez n, a równości (2) przez m, otrzymujemy równości:

$$b^2n=m^2n+d^2n-2mnd\cdot\cos\varphi \quad \text{i} \quad a^2m=mn^2+d^2m+2mnd\cdot\cos\varphi,$$

które dodane stronami dają związek:

$$a^2m+b^2n=m^2n+mn^2+d^2(m+n).\ \text{Stąd:}$$

$$d^2\cdot c=a^2m+b^2n-mnc,\ \text{bo}\ m+n=c\ \text{i ostatecznie:}$$

$$d=\sqrt{\frac{a^2m+b^2n-mnc}{c}}.$$

Uwaga. Wykazany związek $d^2\cdot c=a^2m+b^2n-mnc$ to tak zwany **wzór Stewarta**.

Zastosowania twierdzenia cosinusów w zadaniach na dowodzenie

Przykład 1. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie ABC o kątach α, β i γ zachodzi związek $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma$, to trójkąt ten jest równoramienny.

Rozwiązanie:

W trójkącie ABC (ryc. 5.21) z twierdzenia sinusów otrzymujemy równość $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, skąd:

(1) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$,

Zaś na mocy twierdzenia cosinusów $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, skąd:

(2) $2\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$.

Wobec równości (1) i (2) podany w zadaniu warunek możemy przepisać następująco:

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}.$$

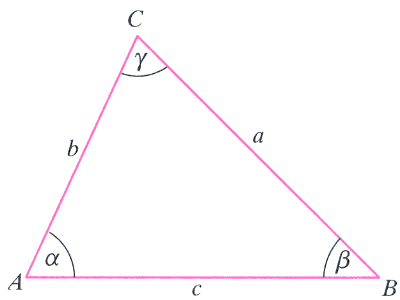
Po przekształceniu tego związku, otrzymamy kolejno równości:

$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$,

$b^2 = c^2$,

$b = c$.

Ostatnia równość dowodzi tezy zadania.



Ryc. 5.21.

Przykład 2. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC o kątach α, β i γ i długościach boków a, b i c zachodzi związek $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$, to trójkąt ten jest równoramienny.

Rozwiązanie:

Ponieważ na mocy twierdzenia cosinusów w trójkącie ABC (ryc. 5.22):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ i $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$, więc:

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ i $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$.

Zatem podany w zadaniu związek jest równoważny równości:

$$\frac{a}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{b}{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}},$$

a ta – kolejno równościom:

$$\frac{2abc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2abc}{c^2 + a^2 - b^2},$$

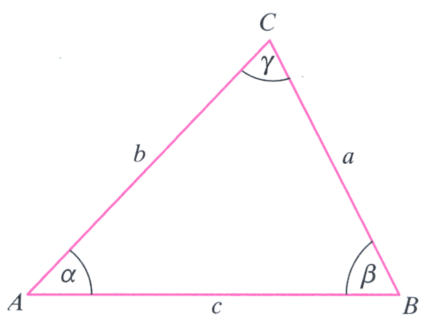
$b^2 + c^2 - a^2 = c^2 + a^2 - b^2$,

$2b^2 = 2a^2$,

$b^2 = a^2$,

$b = a$.

Ostatnia równość dowodzi tezy zadania.



Ryc. 5.22.

Przykład 3*. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie ABC o kątach α, β i γ zachodzi związek $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.

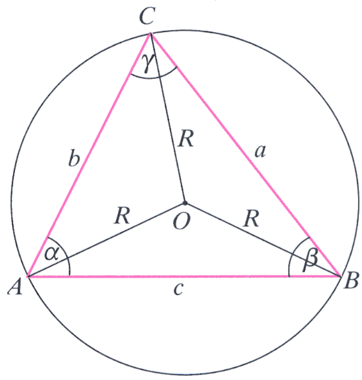
Rozwiązanie:

Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC wynikają (ryc. 5.23) związki:

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R},\ \sin\beta = \frac{b}{2R},\ \sin\gamma = \frac{c}{2R},$$

a z twierdzenia cosinusów – związki:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$



Ryc. 5.23.

Po podstawieniu ich do podanego w zadaniu warunku otrzymujemy równość:

$$\frac{\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{c}{2R},$$

która jest równoważna kolejno równościom:

$$\frac{a+b}{\frac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2abc}} = c,$$

$$\frac{2abc\left(a+b\right)}{a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)} = c,$$

$$a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right) = 2ab\left(a+b\right),$$

$$ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3 = 2ab\left(a+b\right),$$

$$ab\left(a+b\right)+c^2\left(a+b\right)-\left(a^3+b^3\right) = 2ab\left(a+b\right),$$

$$c^2\left(a+b\right)-\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right) = ab\left(a+b\right),$$

$$c^2-\left(a^2-ab+b^2\right) = ab,$$

$$c^2-\left(a^2+b^2\right)+ab = ab,$$

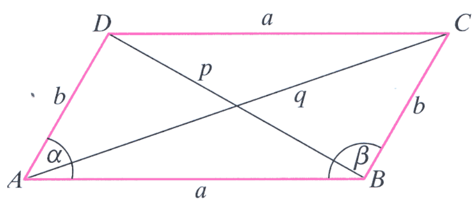
$$c^2 = a^2+b^2.$$

Ostatnia równość dowodzi tezy zadania.

Przykład 4. Udowodnij, że w każdym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych równa jest sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.24.



Ryc. 5.24.

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów do trójkątów *ABD* i *ABC* otrzymujemy równości:

(1) $p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$,

(2) $q^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$,

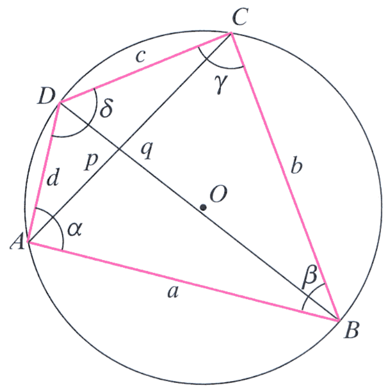
bo $\alpha + \beta = 180^\circ$ oraz $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Zatem $p^2 + q^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Przykład 5.** Wykaż, że w każdym czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków.

Rozwiązanie:

Niech *ABCD* będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.25.



Ryc. 5.25.

Widzimy teraz, że należy udowodnić równość:

$pq = ac + bd$.

Ponieważ czworokąt *ABCD* jest wpisany w okrąg, więc:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów *ABC* i *ACD* otrzymujemy związki:

(1) $p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$,

(2) $p^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180^\circ - \beta) =$
$= c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\beta$.

Mnożąc równość (1) obustronnie przez *cd*, zaś równość (2) przez *ab*, otrzymujemy równości:

(3) $cdp^2 = a^2cd + b^2cd - 2abcd \cdot \cos\beta$,

(4) $abp^2 = abc^2 + abd^2 + 2abcd \cdot \cos\beta$,

które dodane stronami dają równość:

$(ab + cd)p^2 = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 =$

$= (a^2cd + abc^2) + (abd^2 + b^2cd) =$

$= ac(ad + bc) + bd(ad + bc) =$

$= (ad + bc)(ac + bd)$.

Stąd wynika, że:

$$(*)\ p^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów do trójkątów *ABD* i *BCD* otrzymujemy równości:

(5) $q^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha$,

(6) $q^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$,

a z nich, po pomnożeniu ich obu stron odpowiednio przez *bc* i *ad* – równości:

$bcq^2 = a^2bc + bcd^2 - 2abcd \cdot \cos\alpha$,

$adq^2 = ab^2d + ac^2d + 2abcd \cdot \cos\alpha$, które po dodaniu stronami dają równość:

$$(ad+bc)q^2 = a^2bc + bcd^2 + ab^2d + ac^2d =$$
$$=(a^2bc + ab^2d) + (bcd^2 + ac^2d) =$$
$$=ab(ac+bd) + cd(ac+bd) =$$
$$=(ac+bd)(ab+cd).$$

Stąd wynika, że:

$$(**)\ q^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Gdy pomnożymy równości $(*)$ i $(**)$ stronami, otrzymujemy:

$$p^2q^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \cdot \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc},$$

czyli $(pq)^2 = (ac+bd)^2$ i równość $pq = ac+bd$, którą należało udowodnić.

Uwaga. Treścią ostatniego przykładu jest twierdzenie, zwane **twierdzeniem Ptolemeusza**.

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie cosinusów.
2. Kiedy trójkąt o bokach o długości a, b i c jest:

   a) ostrokątny, b) prostokątny, c) rozwartokątny?
3. Oblicz długość boku BC trójkąta ABC, w którym: $AB = 4$, $AC = 6$, $\sphericalangle BAC = 120°$.
4. Wyznacz kąty trójkąta mającego boki o długości:

   a) $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ i $3-3\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{2}, \sqrt{6}$ i $\sqrt{2}$.
5. Wyznacz długości środkowych trójkąta o bokach o długości a, b i c.
6. W trójkącie ABC dane są długości boków: $AB = 4$, $AC = 6$ i $BC = 8$. Oblicz długości odcinków, na jakie dzieli bok BC wysokość opuszczona z wierzchołka C.
7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i b, a jego przekątna – długość d. Wyznacz cosinus kąta między przekątnymi tego trapezu.
8. Bok rombu ma długość a, a kąt ostry tego rombu ma $30°$. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek rombu z punktem przeciwległego boku, dzielącego ten bok w stosunku 1:2.
9. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości jego boków i miara kąta A. Wyznacz miary pozostałych kątów tego czworokąta.
10. Oblicz pole czworokąta wypukłego, mając dane jego boki a, b, c, d oraz kąt φ zawarty między przekątnymi tego czworokąta.
11. Oblicz pole czworokąta wypukłego, mając dane długości d_1 i d_2 jego przekątnych oraz kąt φ zawarty między tymi przekątnymi.

12**. Równoległobok zawiera koło o promieniu r i zawarty jest w kole o promieniu R. Udowodnij, że $\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}$.

13*. Udowodnij, że jeżeli długości a, b, c boków trójkąta spełniają warunek $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, to jeden z kątów tego trójkąta ma $60°$.

VI. Wektory

1. Pojęcie wektora. Wektor swobodny. Dodawanie i odejmowanie wektorów

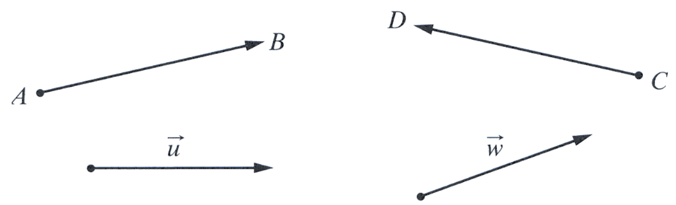
Pojęcie wektora należy do najważniejszych pojęć w naukach ścisłych, na przykład w matematyce, a zwłaszcza w geometrii, służy do opisu wielu przekształceń. Pojęcie wektora wykorzystujemy też w życiu codziennym. Często patrzymy na mapy Polski, Europy czy całego świata, aby wyznaczyć na przykład różne trasy podróży. Jeśli chcemy wskazać drogę od jednego punktu do drugiego, nie wystarczy podanie tych punktów. Trzeba jeszcze któryś z nich wyróżnić jako pierwszy (początek trasy), wtedy niewyróżniony punkt będzie drugi (koniec trasy). Mówimy wówczas, że uporządkowaliśmy tę parę punktów.

Uporządkowaną parę punktów nazywamy **wektorem**. Pierwszy z tych punktów jest **początkiem**, a drugi **końcem** wektora. Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Wektor ten jest także nazywany wektorem związanym.

Wektory oznaczać też będziemy jedną małą literą ze strzałką, na przykład: $\vec{u}$, $\vec{w}$.

O wektorze $\overrightarrow{AB}$ mówimy, że jest zaczepiony w punkcie A. Graficznie wektor przedstawiamy za pomocą strzałki (ryc. 6.1).

Odległość punktów A i B nazywamy długością wektora $\overrightarrow{AB}$ i oznaczamy przez $|\overrightarrow{AB}|$.

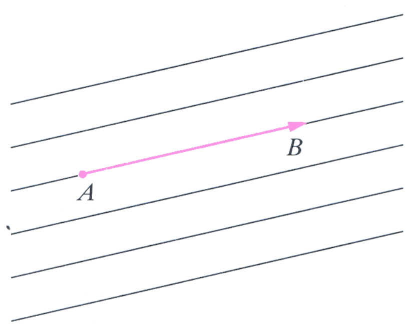


Ryc. 6.1.

Wektor, którego początek i koniec się pokrywają, nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy symbolem $\vec{0}$.

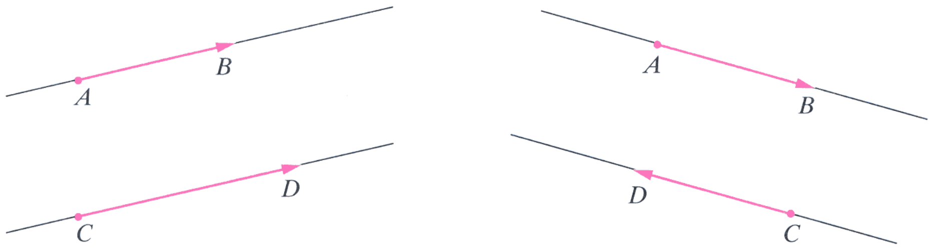
Gdy punkty A i B się nie pokrywają, wyznaczają jedną prostą l (ryc. 6.2). Mówimy wtedy, że wektor $\overrightarrow{AB}$ jest **równoległy** do prostej l. Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest także równoległy do każdej prostej równoległej do prostej AB (ryc. 6.3).

Ryc. 6.2.



Ryc. 6.3.

Dwa wektory niezerowe nazywamy **równoległymi**, gdy proste wyznaczone przez te wektory są równoległe. O takich wektorach mówimy, że mają **ten sam kierunek** (ryc. 6.4).

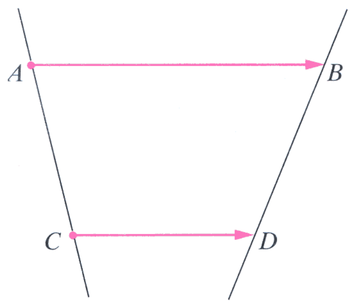


Ryc. 6.4.

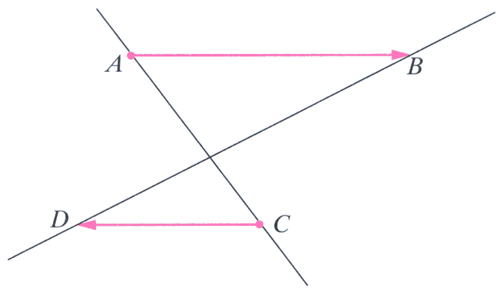
Wektor zerowy nie ma kierunku.

Dwa wektory równoległe mogą być zgodnie albo przeciwnie skierowane.

Rozważmy dwa niezerowe wektory równoległe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ takie, że proste AB i CD są rozłączne, i poprowadźmy jeszcze proste AC i BD (ryc. 6.5 i 6.6).



Ryc. 6.5.



Ryc. 6.6.

Mówimy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają **zwroty**:
- **zgodne**, gdy odcinek BD nie przecina odcinka AC;
- **przeciwne**, gdy odcinek BD przecina odcinek AC.

Jeśli zaś proste AB i CD się pokrywają (ryc. 6.7 i 6.8),

Ryc. 6.7.

Ryc. 6.8.

wówczas wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają **zwroty**:
- **zgodne**, gdy jedna z półprostych $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ zawiera się w drugiej;
- **przeciwne**, gdy żadna z półprostych $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ nie zawiera się w drugiej.

Możemy teraz określić równość wektorów.

Dwa **wektory** $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, równe długości i zgodne zwroty, co zapisujemy:

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

Przyjmujemy ponadto, że każde dwa wektory zerowe są równe.

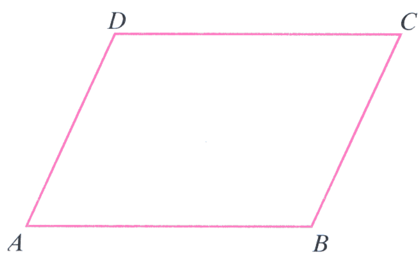
Dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy **wektorami przeciwnymi**, gdy mają ten sam kierunek, równe długości i przeciwne zwroty, co zapisujemy:

$$\vec{u} = -\vec{v}.$$

Przykład 1. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ są przeciwne (ryc. 6.9).

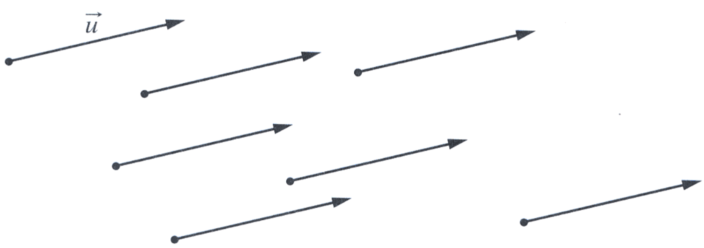
Ryc. 6.9.

Przykład 2. W równoległoboku $ABCD$ (ryc. 6.10) wektorami równymi są wektory: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ oraz $\overrightarrow{DA}$ i $\overrightarrow{CB}$, zaś przeciwnymi – wektory: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$ oraz $\overrightarrow{DA}$ i $\overrightarrow{BC}$.



Ryc. 6.10.

Wektory równe mogą mieć różne początki. Mając dany wektor $\vec{u}$, możemy w każdym punkcie zaczepić wektor jemu równy (ryc. 6.11).

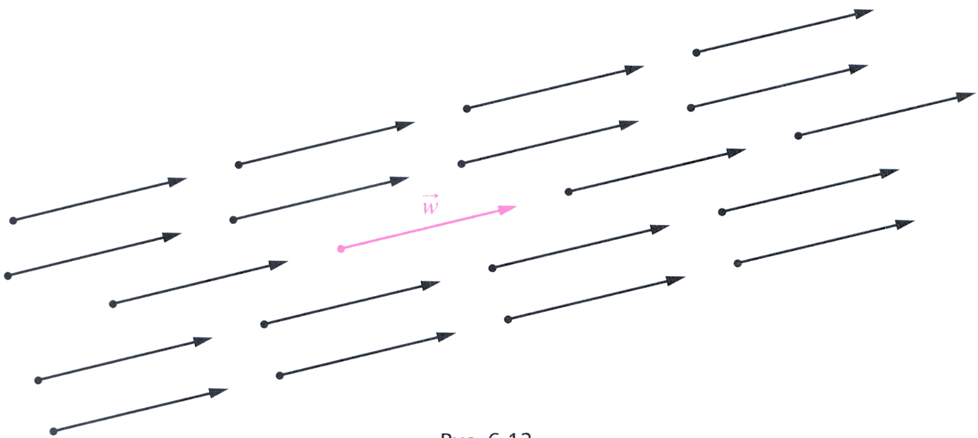


Ryc. 6.11.

Nie ma potrzeby rozróżniać wektorów równych. Każdy z nich możemy bowiem traktować jako reprezentanta zbioru wszystkich wektorów jemu równych.

Zbiór wszystkich wektorów o danej długości, ustalonym kierunku i zwrocie (a więc wektorów równych) nazywamy **wektorem swobodnym**.

Wektor (swobodny) będący zbiorem wszystkich wektorów równych danemu wektorowi związanemu $\vec{w}$ będziemy oznaczać także symbolem $\vec{w}$ i graficznie przedstawiać strzałką (ryc. 6.12). Tak więc każdy wektor związany wyznacza pewien (i tylko jeden) wektor swobodny.

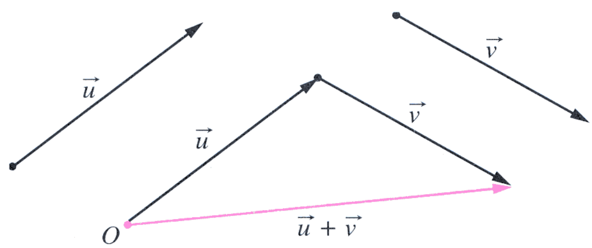


Ryc. 6.12.

Dwa wektory swobodne $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równe, jeśli wektory związane, które je reprezentują, są równe.

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że słowo wektor będzie oznaczało wektor swobodny.

Spróbujmy teraz określić sumę i różnicę wektorów. Niech będą dane niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

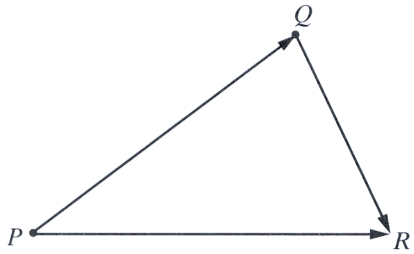


Ryc. 6.13.

Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor określony następująco: dowolny punkt O płaszczyzny obieramy jako początek wektora $\vec{u}$, a koniec tego wektora za początek wektora $\vec{v}$. Wektor, którego początek znajduje się w punkcie O, a końcem jest koniec wektora $\vec{v}$, nazywamy **sumą wektorów** $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i oznaczamy przez $\vec{u} + \vec{v}$ (ryc. 6.13).

Można udowodnić, iż powyższe określenie sumy nie zależy od wyboru punktu O, to znaczy, że jeśli obierzemy dowolny punkt O, wtedy otrzymane sumy wektorów będą wektorami równymi.

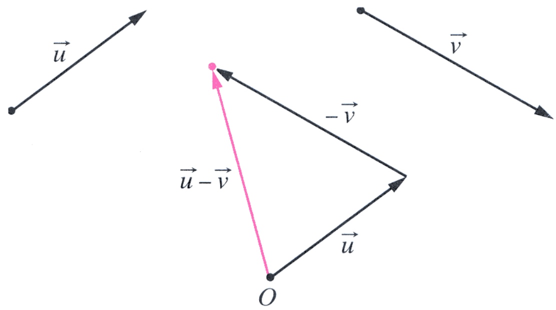
Przykład 3. Jeżeli dane są trzy dowolne punkty P, Q i R, to wektor $\overrightarrow{PR}$ nazywamy sumą wektorów $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$, co zapisujemy: $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (ryc. 6.14).



Ryc. 6.14.

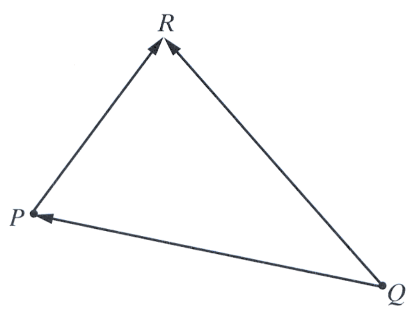
Podobnie: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$.

Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy sumę wektorów $\vec{u}$ i $-\vec{v}$ (wektora przeciwnego do wektora $\vec{v}$), co zapisujemy $\vec{u} - \vec{v}$ (ryc. 6.15).



Ryc. 6.15.

Przykład 4. Jeżeli dane są trzy dowolne punkty P, Q i R, to wektor $\overrightarrow{QR}$ jest różnicą wektorów $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PQ}$, co zapisujemy: $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ (ryc. 6.16).



Ryc. 6.16.

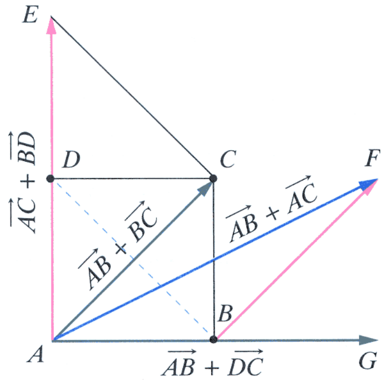
Przykład 5. Dany jest kwadrat $ABCD$. Wykreśl wektor równy sumie wektorów:

a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$; d) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$; e) $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$.

Rozwiązanie:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$, bo $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$;
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AG}$, bo $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DC}$;
d) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}$, bo $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BD}$;
e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, bo $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$.

Rozwiązanie w formie graficznej przedstawia rycina 6.17.



Ryc. 6.17.

Dodawanie wektorów jest przemienne i łączne, co wynika z następującego twierdzenia:

Twierdzenie

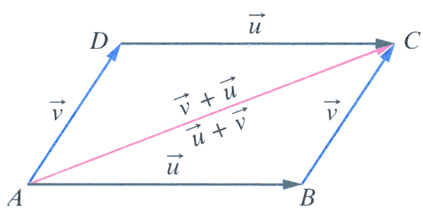
Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zachodzą równości:

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (przemienność),
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (łączność),

a ponadto:

3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$,
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

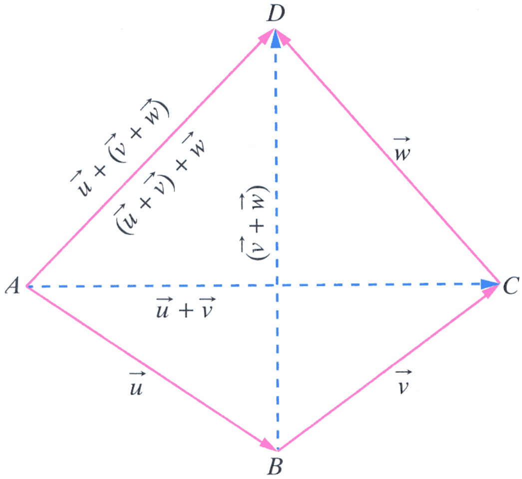
☐ Dowód. Dla dowodu przemienności dodawania wektorów wystarczy posłużyć się równoległobokiem. Wykreślając równoległobok $ABCD$, przyjmijmy, że $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ (ryc. 6.18).



Ryc. 6.18.

Wówczas z definicji sumy wektorów i własności równoległoboku wynika, że:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{v} + \vec{u}$, skąd $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Dowód łączności dodawania wektorów przeprowadzimy, obierając dowolne cztery punkty A, B, C i D i przyjmując, że $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$ (ryc. 6.19).



Ryc. 6.19.

Wówczas na podstawie definicji sumy wektorów otrzymujemy:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$, skąd:

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$. □

Dowody równości 3. i 4. przeprowadź samodzielnie.

Pytania i zadania

1. Co to jest wektor?
2. Wyjaśnij pojęcia: kierunek wektora, długość wektora, zwrot wektora, równość wektorów.
3. Co to jest wektor swobodny?
4. Podaj określenie: sumy wektorów, różnicy wektorów.
5. Jakie własności ma dodawanie wektorów?
6. Wskaż wszystkie wektory wyznaczone przez wierzchołki:

   a) trójkąta, b) prostokąta, c) rombu, d) trapezu.
7. W każdej z wymienionych w zadaniu 6. figur wskaż pary wektorów:

   a) równych, b) przeciwnych (o ile takie pary istnieją).
8. Mając dane dwa wektory, zbuduj ich sumę, różnicę i połowę sumy.
9. Dany wektor przedstaw jako sumę albo różnicę danych wektorów.
10. Dane są punkty A, B, C, D. Przedstaw graficznie wektor $\overrightarrow{AD}$ jako sumę wektorów:

    a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{BD}$.

11. Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Zbuduj wektor $\vec{w}$ taki, że:
a) $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; b) $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; c) $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

12. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Wyznacz długości wektorów: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BA}$.

13. Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość a, natomiast punkt D jest środkiem boku AB. Wyznacz długości wektorów: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AD}$.

14*. Sprawdź, czy dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzą równości:
a) $\vec{u} + \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$; b) $\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} = \frac{\vec{v} + \vec{u}}{2} = \vec{v}$.

15*. Wykaż, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzą nierówności:
a) $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$; b) $|\vec{u} - \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

16. Wektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ są kolejnymi bokami sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Wyznacz wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$ w zależności od wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

17. Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są bokami trójkąta. Wyznacz środkowe tego trójkąta w zależności od wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

18*. W prostopadłościanie poprowadzono z danego wierzchołka A przekątne AK, AP i AL ścian oraz przekątną AM prostopadłościanu. Udowodnij, że $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AM}$.

2. Iloczyn wektora i liczby

Mając wektor $\vec{u}$, potrafimy wykreślić wektory $\vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ (ryc. 6.20).

Ryc. 6.20.

Widzimy, że każdy z tych wektorów jest równoległy do wektora $\vec{u}$ i ma zwrot z nim zgodny, a długości wykreślonych wektorów są równe odpowiednio: $2|\vec{u}|$, $3|\vec{u}|$ i $4|\vec{u}|$.

Gdybyśmy natomiast narysowali wektory: $-\vec{u} - \vec{u}$, $-\vec{u} - \vec{u} - \vec{u}$, $-\vec{u} - \vec{u} - \vec{u} - \vec{u}$ (ryc. 6.21), zauważymy, że każdy z nich jest także równoległy do wektora $\vec{u}$, ma długość równą odpowiednio $2|\vec{u}|$, $3|\vec{u}|$ i $4|\vec{u}|$, ale zwrot przeciwny do zwrotu wektora $\vec{u}$.

Ryc. 6.21.

Wektory $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $4\vec{u}$, $-2\vec{u}$, $-3\vec{u}$, $-4\vec{u}$ nazywamy iloczynami wektora $\vec{u}$ i – odpowiednio – liczby: 2, 3, 4, –2, –3 i –4.

Podobnie określamy iloczyn wektora $\vec{u}$ i innych liczb całkowitych, przy czym iloczyn ten można też uogólnić na iloczyn wektora i dowolnej liczby rzeczywistej.

Dlatego przyjmiemy następującą definicję iloczynu wektora i liczby rzeczywistej:

Iloczynem wektora niezerowego $\vec{u}$ i liczby rzeczywistej $a \neq 0$ nazywamy wektor, który:
– jest równoległy do wektora $\vec{u}$ (ma kierunek wektora $\vec{u}$),
– ma długość równą $|a| \cdot |\vec{u}|$,
– ma zwrot zgodny ze zwrotem wektora $\vec{u}$, gdy $a > 0$, zaś przeciwny, gdy $a < 0$.

Jeśli $\vec{u}$ jest wektorem zerowym lub $a = 0$, to przyjmujemy, że iloczyn wektora $\vec{u}$ i liczby a jest wektorem zerowym.

Zdefiniowany iloczyn oznaczamy przez $a\vec{u}$. Zamiast $a\vec{u}$ piszemy także $\vec{u}a$.

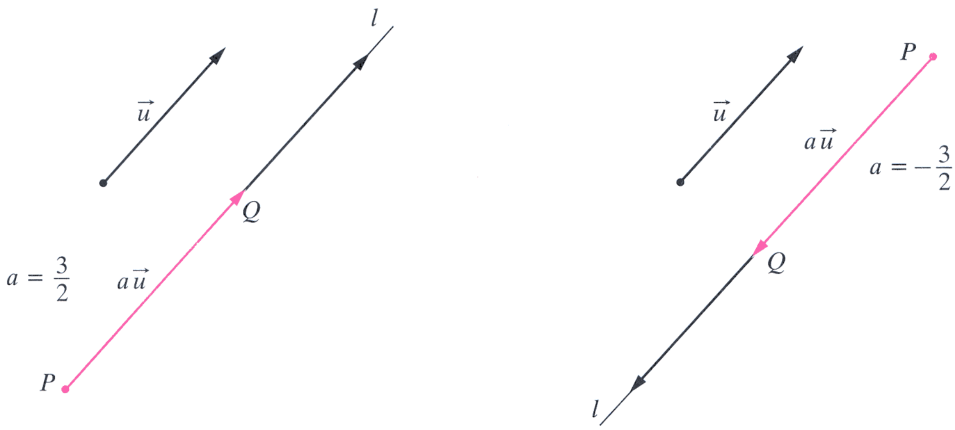
Gdy środkiem odcinka AB jest punkt S, to (ryc. 6.22):

Ryc. 6.22.

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

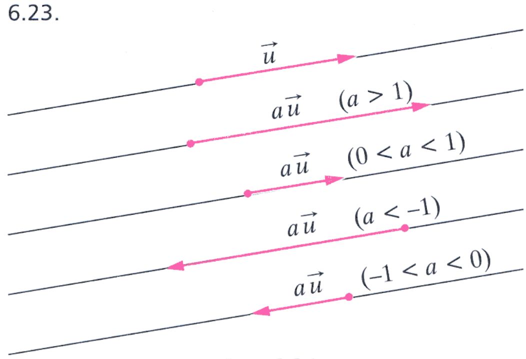
Gdy $\vec{w} = a\vec{u}$, to liczbę a nazywamy **miarą wektora** $\vec{w}$ względem wektora $\vec{u}$.

Mając dany wektor $\vec{u}$ i liczbę $a \neq 0$, iloczyn $a\vec{u}$ konstruujemy następująco:



Ryc. 6.23.

przez dowolny punkt P płaszczyzny prowadzimy półprostą Pl o zwrocie zgodnym ze zwrotem wektora $\vec{u}$, gdy $a > 0$, zaś przeciwnym, gdy $a < 0$ (ryc. 6.23 i 6.24), po czym na tej półprostej odkładamy od punktu P odcinek PQ o długości równej $|a| \cdot |\vec{u}|$. Wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest szukanym iloczynem wektora $\vec{u}$ i liczby a: $a\vec{u}$.



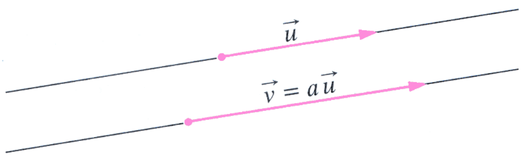
Ryc. 6.24.

Podamy teraz w postaci twierdzeń podstawowe własności iloczynu wektora i liczby.

Twierdzenie 1.

Wektory niezerowe $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $a \neq 0$ taka, że $(*)$ $\vec{v} = a\vec{u}$.

□ Dowód. Jeżeli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ spełniają dla pewnego $a \neq 0$ równość $(*)$, to są oczywiście równoległe (na mocy definicji) (ryc. 6.25).



Ryc. 6.25.

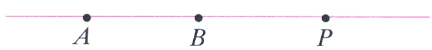
Załóżmy teraz, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe. Jeżeli mają one ten sam zwrot, to przyjmując $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$, otrzymamy równość $|\vec{v}| = |a| \cdot |\vec{u}|$, która w myśl definicji iloczynu wektora i liczby oznacza, że wektor $\vec{v}$ jest iloczynem wektora $\vec{u}$ i liczby $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.

Gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają zwroty przeciwne, wystarczy przyjąć $a = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ i też otrzymamy równość $(*)$.

Tym samym dowód twierdzenia 1. jest zakończony. □

Z twierdzenia tego wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Punkt P leży na prostej AB (ryc. 6.26) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba a, że $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.



Ryc. 6.26.

Wniosek 2. Punkt P leży na półprostej o początku A i przechodzącej przez punkt B (ryc. 6.27) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba a, że $a \geqslant 0$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ryc. 6.27.

Wniosek 3. Punkt P leży na półprostej dopełniającej do półprostej, o której mowa we wniosku 2. (ryc. 6.28), gdy istnieje liczba a taka, że $a \leqslant 0$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ryc. 6.28.

Wniosek 4. Punkt P należy do odcinka AB (ryc. 6.29) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba a taka, że $0 \leqslant a \leqslant 1$ i $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ryc. 6.29.

Kolejne twierdzenia ustalają prawo łączności mnożenia przez liczbę i prawa rozdzielności mnożenia (przez liczbę) względem dodawania (wektorów lub liczb).

Twierdzenie 2.

Dla dowolnego wektora $\vec{u}$ i dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość:

$$a\left(b\vec{u}\right) = (ab)\vec{u}.$$

Twierdzenie 3.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i dowolnej liczby a zachodzi równość:

$$a\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

Twierdzenie 4.

Dla dowolnych liczb a i b i dowolnego wektora $\vec{u}$ zachodzi równość:

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}.$$

Dowody tych twierdzeń przeprowadź samodzielnie.

Pytania i zadania

1. Podaj definicję iloczynu wektora i liczby. Jakie podstawowe własności ma ten iloczyn?
2. Dany jest wektor $\vec{u}$. Wykreśl wektory:
   a) $\frac{1}{2}\vec{u}$; b) $-\frac{3}{2}\vec{u}$; c) $4\vec{u}$; d) $\frac{7}{2}\vec{u}$.
3. Mając dany wektor $\vec{u}$, wykreśl wektory:
   a) $\sqrt{2}\,\vec{u}$; b) $\sqrt{3}\,\vec{u}$; c) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\vec{u}$; d) $-2\sqrt{2}\,\vec{u} + 3\sqrt{3}\,\vec{u}$.
4. Wykonaj działania:
   a) $2\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + 3\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$; b) $\vec{u} + 4\left(\vec{v} + \vec{u}\right) - 2\left[\vec{u} - 3\left(\vec{v} - \vec{u}\right)\right]$.
5. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Wykreśl wektory:
   a) $2\overrightarrow{AB}$; b) $-2\overrightarrow{AC}$; c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; d) $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$; e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
6. Wykaż twierdzenie 2.
7. Wykaż twierdzenie 3.
8. Wykaż twierdzenie 4.

9. Środki A', B', C' boków trójkąta ABC połączono z dowolnym punktem O. Udowodnij, że $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.
10. Dany jest prostokąt $ABCD$. Środkami boków CD i BC są odpowiednio punkty M i N. Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{q}$. Wyznacz wektory $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ i $\overrightarrow{MN}$ w zależności od wektorów $\vec{p}$ i $\vec{q}$.
11. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD kąta A. Wyznacz wektor $\overrightarrow{AD}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
12*. Dane są niezerowe wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$, przy czym $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$. Wyznacz miarę kąta AOB.
13*. Punkty K i L są środkami boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.
14*. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów: A, B, C, D i E. Niech P będzie środkiem odcinka łączącego środki odcinków AB i CD. Wykaż, że $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}\right)$.

3. Zastosowanie wektorów do dowodzenia w geometrii

Podamy tutaj przykłady zastosowania wektorów do dowodzenia pewnych faktów geometrycznych z pozoru niemających nic wspólnego z działaniami na wektorach.

Przykład 1. Udowodnij, że czworokąt, w którym przekątne połowią się, jest równoległobokiem.

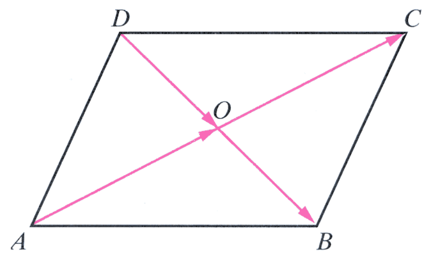
Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie czworokątem, którego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O i połowią się (ryc. 6.30). Wówczas $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

Zatem:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC},$$

czyli $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Ryc. 6.30.

Z równości tej wnosimy, że boki AB i DC tego czworokąta są równoległe i równej długości. Czworokąt ten jest więc równoległobokiem.

Przykład 2. Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i równy jego połowie.

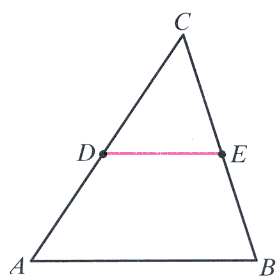
Rozwiązanie:

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, zaś D i E środkami jego boków – odpowiednio AC i BC (ryc. 6.31). Wówczas zachodzą równości:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Zatem:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ czyli}$$

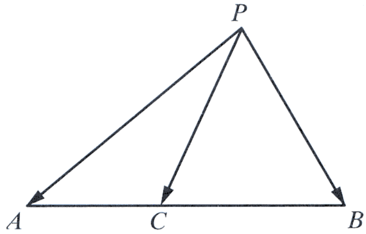


Ryc. 6.31.

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, skąd wynika, że wektory $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{AB}$ są równoległe oraz długość wektora $\overrightarrow{DE}$ jest połową długości wektora $\overrightarrow{AB}$. Dowodzi to oczywiście tezy zadania.

Przykład 3.** Dany jest odcinek $\overline{AB}$ oraz taki jego punkt C, że $AC:CB = a:b$ (ryc. 6.32). Udowodnij, że dla dowolnego punktu P płaszczyzny zachodzi równość:

$$\overrightarrow{PC} = \frac{b}{a+b} \cdot \overrightarrow{PA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{PB}.$$



Ryc. 6.32.

Rozwiązanie:

Z założenia wynika, że:

$(*)\quad b \cdot AC = a \cdot CB.$

Ponieważ wektory $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ są równoległe i mają zgodne zwroty, zatem także wektory $b \cdot \overrightarrow{AC}$ i $a \cdot \overrightarrow{CB}$ są równoległe i mają zgodne zwroty, ponieważ liczby a i b są jednakowego znaku. Wobec tego, a także na mocy równości $(*)$, otrzymujemy równość:

$b \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot \overrightarrow{CB}.$

Ponadto zachodzą równości:

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC},$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$, skąd mnożąc obie strony równości odpowiednio przez b i a, otrzymujemy równość:

$b \cdot \overrightarrow{PC} = b \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{AC},$

$a \cdot \overrightarrow{PC} = a \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \overrightarrow{BC}.$

Po dodaniu ostatnich dwóch równości stronami otrzymujemy:

$(a+b)\overrightarrow{PC} = b \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{AC} + a \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \overrightarrow{BC}$, skąd:

$$(a+b)\overrightarrow{PC} = \left(b \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB}\right) + b \cdot \overrightarrow{AC} + a \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$= \left(b \cdot \overrightarrow{PA} + a \cdot \overrightarrow{PB}\right) + a \cdot \overrightarrow{CB} + a \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$= b \cdot \overrightarrow{PA} + a \cdot \overrightarrow{PB} + a\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= b \cdot \overrightarrow{PA} + a \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \vec{0} = b \cdot \overrightarrow{PA} + a \cdot \overrightarrow{PB},$$ czyli:

$(a+b)\overrightarrow{PC} = b \cdot \overrightarrow{PA} + a \cdot \overrightarrow{PB}$ i ostatecznie:

$$\overrightarrow{PC} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{PA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{PB}.$$

Przykład 4*. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D, O, przy czym żadne trzy spośród tych punktów A, B, C, D nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta. Teraz wystarczy zauważyć, że:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \iff \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \iff$$

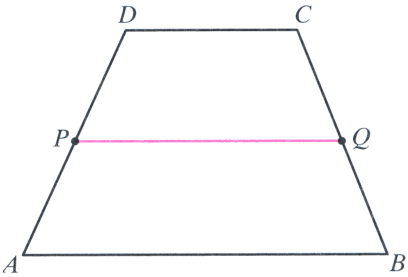
$$\iff \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} \iff \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \iff \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD},$$

zaś równość $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ zachodzi w czworokącie $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on równoległobokiem.

Przykład 5*. Udowodnij, że odcinek łączący środki boków nierównoległych trapezu jest równoległy do jego podstaw oraz ma długość równą średniej arytmetycznej długości tych podstaw.

Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie trapezem, w którym podstawami są boki AB i CD, zaś środkami boków nierównoległych AD i BC są odpowiednio punkty P i Q (ryc. 6.33). Wówczas otrzymujemy równości:



Ryc. 6.33.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$,

które dodane stronami prowadzą do równości:

$(*)\ 2\overrightarrow{PQ} = \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ}\right)$.

Ale $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$ i $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$, więc równość $(*)$ jest równoważna równości:

$(**)\ 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe i mają zgodne zwroty, zatem istnieje taka liczba dodatnia a, że $\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{DC}$. Stąd, a także z równości $(**)$, wynika równość:

$2\overrightarrow{PQ} = a \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} = (a + 1)\overrightarrow{DC}$, czyli równość: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(a + 1)\overrightarrow{DC}$, która dowodzi równoległości wektorów $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{DC}$.

Ponadto zachodzi też równoległość wektorów $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz równość:

$2\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|$ i ostatecznie równość:

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$, która kończy dowód tezy zadania.

Przykład 6. Wykaż, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt.

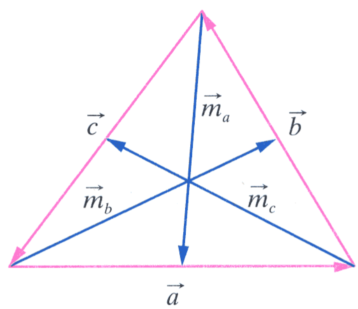
Rozwiązanie:

Przy oznaczeniach jak na rycinie 6.34 mamy równości:

$\overrightarrow{m_a} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{m_b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{m_c} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Ryc. 6.34.

Z trzech wektorów, z których każde dwa są nierównoległe, można zbudować trójkąt, jeśli ich suma jest wektorem zerowym. Ponieważ każde dwa spośród wektorów $\overrightarrow{m_a}$, $\overrightarrow{m_b}$ i $\overrightarrow{m_c}$ są nierównoległe, a ponadto:

$$\overrightarrow{m_a} + \overrightarrow{m_b} + \overrightarrow{m_c} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{3}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{3}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0},\ (\text{bo } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}),$$

więc z wektorów $\overrightarrow{m_a}$, $\overrightarrow{m_b}$ i $\overrightarrow{m_c}$ można zbudować trójkąt.

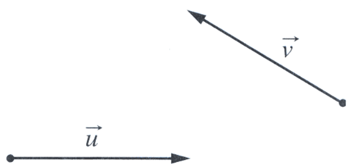
Pytania i zadania

1. Udowodnij, że środki kolejnych boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.
2. Udowodnij, że środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2:1.
3. Wykaż, że w czworokącie, który nie jest trapezem, środki przekątnych i środki dwóch przeciwległych boków są wierzchołkami równoległoboku.
4. Udowodnij, że jeżeli punkt O jest środkiem sześciokąta foremnego $ABCDEF$, to $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.
5. Wykaż, że czworokąt jest trapezem wtedy i tylko wtedy, gdy środki jego przekątnych i środki jednej z par jego przeciwległych boków leżą na jednej prostej.
6. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ środkami boków AB, BC, CD i DE są odpowiednio punkty P, Q, R i S, a środkami odcinków PR i QS – punkty X i Y. Udowodnij, że $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

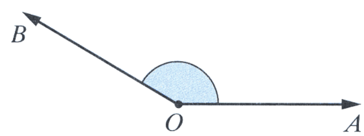
4. Iloczyn skalarny wektorów i jego własności

Określimy teraz działanie na wektorach, którego wynikiem nie będzie wektor (jak to dotąd bywało), a... liczba. Przedtem jednak wprowadzimy pojęcie kąta dwóch wektorów, które będziemy wykorzystywać w naszych rozważaniach.

Kątem wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy kąt wypukły AOB, gdzie $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ (ryc. 6.35 i 6.36). Kąt ten oznaczamy symbolem $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v})$.



Ryc. 6.35.

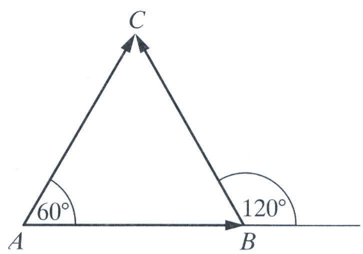


Ryc. 6.36.

Na przykład w trójkącie równobocznym ABC (ryc. 6.37):

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=60°$,

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=120°$.



Ryc. 6.37.

A oto zapowiedziana definicja nowego działania na wektorach, zwanego iloczynem skalarnym wektorów:

Iloczynem skalarnym wektorów niezerowych $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy **liczbę** równą iloczynowi ich długości i cosinusa kąta tych wektorów.
Jeżeli któryś z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektorem zerowym, to ich iloczyn skalarny jest liczbą 0.

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznacza się symbolem $\vec{u}\circ\vec{v}$.

Zatem jeśli $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$, to $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v})$. Gdy zaś $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Przykład 1. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ takich, że $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v}) = 45°$.
Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją iloczynu skalarnego wektorów otrzymujemy:
$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 45° = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Przykład 2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1. Oblicz $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC}$ (ryc. 6.38).

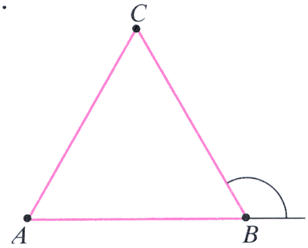
Rozwiązanie:

Z treści przykładu wynika, że:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ i $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 120°$.

Zatem:

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.



Ryc. 6.38.

Przykład 3. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie O (ryc. 6.39). Oblicz $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{CB}$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = 2$,

$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{2}$ oraz:

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = 45°$, $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}) = 0°$,

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 90°$, $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 135°$,

$\sphericalangle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CB}) = 180°$, więc:

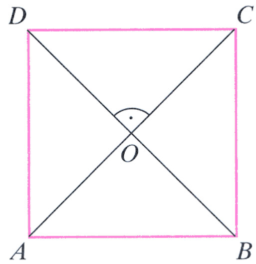
$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AO} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$,

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$,

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 90° = 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$,

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 135° = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$,

$\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$.



Ryc. 6.39.

Powyższy przykład pokazuje, że iloczyn skalarny wektorów może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem. Z określenia kąta dwóch wektorów i iloczynu skalarnego wektorów wynika bowiem następujący wniosek:

Wniosek. Iloczyn skalarny wektorów niezerowych $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest:
- dodatni, gdy kąt tych wektorów ma miarę z przedziału $\langle 0°; 90°)$;
- zerem, gdy kąt tych wektorów jest prosty (czyli, gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe);
- ujemny, gdy kąt tych wektorów ma miarę z przedziału $(90°, 180°\rangle$.

Zatem:

$$\vec{u} \circ \vec{v} > 0 \iff \sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) \in \langle 0°; 90°),$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \iff \sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 90° \quad \vee \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0},$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} < 0 \iff \sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) \in (90°; 180°\rangle.$$

Iloczyn skalarny wektora $\vec{u}$ i tego samego wektora $\vec{u}$ jest równy kwadratowi jego długości, bowiem $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0° = |\vec{u}|^2$. Zamiast $\vec{u} \circ \vec{u}$ piszemy $\vec{u}^{\,2}$ i iloczyn ten nazywamy **kwadratem skalarnym** wektora $\vec{u}$. Zatem dla każdego wektora $\vec{u}$ zachodzi równość:

$$\vec{u}^{\,2} = |\vec{u}|^2.$$

Wynika stąd, że długość każdego wektora $\vec{u}$ możemy wyrazić wzorem:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego wektorów sformułujemy w postaci kilku twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzi równość:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}.$$

□ Dowód. Własność ta, zwana **przemiennością iloczynu skalarnego wektorów**, wynika wprost z definicji, bowiem:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{v};\vec{u}) = \vec{v} \circ \vec{u},$$

gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są niezerowe. Jeśli zaś $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to oczywiście $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 = \vec{v} \circ \vec{u}$. □

Twierdzenie 2.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zachodzi równość:

$$\vec{u} \circ \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}.$$

Twierdzenie to wyraża własność **rozdzielności iloczynu skalarnego** wektorów względem ich **sumy**.

Iloczyn skalarny wektorów ma jeszcze jedną własność, zwaną **łącznością mieszaną**. Mówi o niej kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz liczb a i b zachodzi wzór:

$$(a\vec{u}) \circ (b\vec{v}) = ab \cdot (\vec{u} \circ \vec{v}).$$

Dowody twierdzeń 2. i 3. na razie pomijamy. Powrócimy do nich w ostatnim podrozdziale.

Z podanych twierdzeń 1., 2. i 3. wynika, że pewne działania na wektorach przebiegają podobnie jak na wielomianach.

Przykład 4. Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ prawdziwa jest równość:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\circ\vec{v} + \vec{v}^{\,2}.$$

Rzeczywiście, korzystając z definicji i własności iloczynu skalarnego wektorów:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\vec{u} + \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\vec{v} =$$

$$= \vec{u}\circ\vec{u} + \vec{v}\circ\vec{u} + \vec{u}\circ\vec{v} + \vec{v}\circ\vec{v} = \vec{u}^{\,2} + \vec{u}\circ\vec{v} + \vec{u}\circ\vec{v} + \vec{v}^{\,2} =$$

$$= \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\circ\vec{v} + \vec{v}^{\,2}.$$

Przykład 5. Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzi równość $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$.

Istotnie, otrzymujemy kolejno:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\left(\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)\right) = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\vec{u} + \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\circ\left(-\vec{v}\right) =$$

$$= \vec{u}\circ\vec{u} + \vec{v}\circ\vec{u} + \vec{u}\circ\left(-\vec{v}\right) + \vec{v}\circ\left(-\vec{v}\right) = \vec{u}^{\,2} + \vec{u}\circ\vec{v} - \vec{u}\circ\vec{v} - \vec{v}^{\,2} = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}.$$

Przykład 6. Oblicz $\vec{u}\circ\vec{v}$ oraz $\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)$, jeśli $\left|\vec{u}\right| = 4$, $\left|\vec{v}\right| = 5$, $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 7$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\circ\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u}\circ\vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2$, więc:

$2\vec{u}\circ\vec{v} = \left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2$, czyli:

$$\vec{u}\circ\vec{v} = \frac{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u}\right|^2 - \left|\vec{v}\right|^2}{2}.$$

Po podstawieniu podanych w przykładzie wartości otrzymujemy:

$$\vec{u}\circ\vec{v} = \frac{7^2-4^2-5^2}{2} = \frac{49-16-25}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ponadto $\vec{u}\circ\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)$, skąd:

$\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\circ\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$ i ostatecznie:

$\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \dfrac{4}{4\cdot 5} = \dfrac{1}{5}$, czyli:

$$\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \arccos\frac{1}{5}.$$

Na koniec zauważmy, że mnożenie skalarne wektorów **nie jest łączne**, bowiem iloczyn $\vec{u}\circ\left(\vec{v}\circ\vec{w}\right)$ jest iloczynem wektora $\vec{u}$ i liczby $\vec{v}\circ\vec{w}$, a zatem jest wektorem równoległym do wektora $\vec{u}$, natomiast iloczyn $\left(\vec{u}\circ\vec{v}\right)\circ\vec{w}$, jako iloczyn wektora $\vec{w}$ i liczby $\vec{u}\circ\vec{v}$, jest wektorem równoległym do wektora $\vec{w}$.

Pytania i zadania

1. Podaj określenie kąta dwóch wektorów.
2. Co to jest iloczyn skalarny dwóch wektorów?
3. Jakie własności ma mnożenie skalarne wektorów?
4. Czy mnożenie skalarne wektorów jest łączne? Odpowiedź uzasadnij.
5. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdy:
   a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 120°$;
   b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 135°$;
   c) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 5$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 180°$;
   d) $|\vec{u}| = 2{,}5$, $|\vec{v}| = 1{,}8$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 90°$.
6. Wyznacz kąt wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:
   a) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $\vec{u} \circ \vec{v} = \sqrt{2}$;
   b) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{u} \circ \vec{v} = -3\sqrt{3}$;
   c) $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = \frac{2}{3}$, $\vec{u} \circ \vec{v} = -1$.
7. W rombie $ABCD$ bok ma długość 2, a kąt BAC jest równy 60°. Oblicz:
   a) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}$;
   b) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$;
   c) $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}$;
   d) $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD}$;
   e) $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{BC}$;
   f) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD}$.
8. Oblicz długości wektorów $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$, jeśli:
   a) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 60°$;
   b) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}) = 120°$.
9. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz kąt tych wektorów, jeśli:
   a) $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{61}$;
   b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 6$.
10. Wykonaj działania:
    a) $(2\vec{u}) \circ (\vec{u} + \vec{v})$;
    b) $(\vec{u} + 2\vec{v})(\vec{u} - 2\vec{v})$;
    c) $(\vec{u} + \vec{v})(-\vec{u} + \vec{v})$;
    d) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) + 2\vec{v}^2$;
    e) $(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$.
11. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:
    a) $\vec{u} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{v} = \vec{p} - 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 90°$;
    b) $\vec{u} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{v} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1$.
12. Znajdź długość wektora $\vec{u}$, jeśli:
    a) $\vec{u} = 6\vec{p} - 8\vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 90°$;
    b) $\vec{u} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 5$, $\sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 120°$.

13*. Oblicz długości przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdy:
    a) $\vec{u} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{v} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, \sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 60°$;
    b) $\vec{u} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{v} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 45°$.

14*. Wiadomo, że $\vec{u} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{v} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{w} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, gdzie $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$ oraz $\sphericalangle(\vec{p};\vec{q}) = 90°$. Uprość wyrażenie $\vec{u}^2 + 3\vec{u} \circ \vec{v} - 2\vec{v} \circ \vec{w} + 1$.

15*. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1. Oblicz wartość wyrażenia: $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{AB}$.

16*. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD, BE i CF. Oblicz wartość wyrażenia: $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{BE}$.

17*. Dane są $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, przy czym $\vec{u}\circ\vec{v}\neq-\frac{3}{2}$. Znajdź wektor $\vec{x}$ spełniający równanie: $3\vec{x}+2\vec{u}(\vec{x}\circ\vec{v})=\vec{w}$.

18**. Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$, przy czym $(\vec{a}\circ\vec{b})^2\neq\frac{1}{6}$. Znajdź wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ spełniające układ równań:

$$\begin{cases} 3\vec{x}+3\vec{a}\left(\vec{y}\circ\vec{b}\right)=\vec{c} \\ 4\vec{a}+\left(\vec{x}\circ\vec{b}\right)+\vec{y}=\vec{d}. \end{cases}$$

19. Co można powiedzieć o wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$;

b) $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{u}+\vec{v}|$;

c) $|\vec{u}-\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$;

d) $|\vec{u}+\vec{v}|=\big||\vec{u}|-|\vec{v}|\big|$.

5. Zastosowanie iloczynu skalarnego wektorów w geometrii

Iloczyn skalarny wektorów jest doskonałym narzędziem w dowodzeniu wielu znanych i mniej znanych twierdzeń geometrycznych.

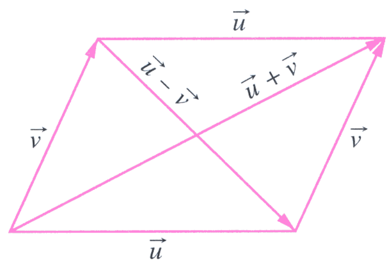
Przykład 1. Udowodnij, że równoległobok jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Rozważmy równoległobok zbudowany na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (ryc. 6.40). Wówczas jego przekątne są wektorami $\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{u}-\vec{v}$. Zatem:

$$\vec{u}+\vec{v}\perp\vec{u}-\vec{v} \iff (\vec{u}+\vec{v})\circ(\vec{u}-\vec{v})=0 \iff$$
$$\iff \vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}=0 \iff \vec{u}^{\,2}=\vec{v}^{\,2} \iff$$
$$\iff |\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2 \iff |\vec{u}|=|\vec{v}|.$$

(Równoległobok, którego boki są równej długości, jest rombem).



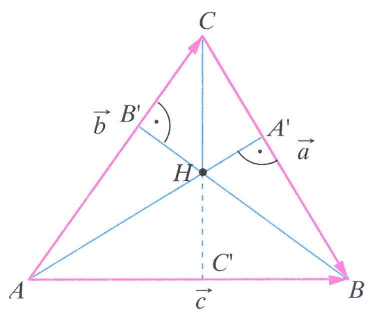
Ryc. 6.40.

Przykład 2. Wykaż, że w każdym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Przyjmijmy, że $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ (ryc. 6.41).

Poprowadźmy wysokości AA' i BB' i ich punkt przecięcia się oznaczmy przez H. Należy wykazać, że odcinek CC' poprowadzony przez punkt H też jest wysokością tego trójkąta.



Ryc. 6.41.

Ponieważ:

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{a}$ oraz $\overrightarrow{BH} \perp \vec{b}$, więc:

$\overrightarrow{AH} \circ \vec{a} = 0$ oraz $\overrightarrow{BH} \circ \vec{b} = 0$.

Wiemy też, że $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \vec{b}$ oraz $\overrightarrow{CH} = \vec{a} + \overrightarrow{BH}$. Stąd:

$\overrightarrow{CH} \circ \vec{a} = \left(\overrightarrow{AH} - \vec{b}\right) \circ \vec{a} = \overrightarrow{AH} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{a} = -\vec{a} \circ \vec{b}$ oraz:

$\overrightarrow{CH} \circ \vec{b} = \left(\vec{a} + \overrightarrow{BH}\right) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{b} + \overrightarrow{BH} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{b}$. Stąd:

$\overrightarrow{CH} \circ \vec{c} = \overrightarrow{CH} \circ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{CH} \circ \vec{a} + \overrightarrow{CH} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0$, czyli:

$\overrightarrow{CH} \circ \vec{c} = 0$, co dowodzi prostopadłości wektorów $\overrightarrow{CH}$ i $\vec{c}$ i kończy dowód tezy zadania.

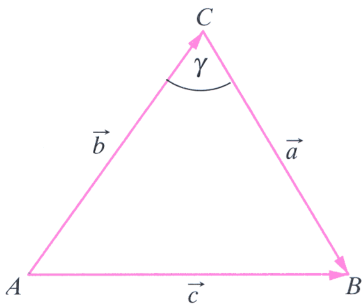
Przykład 3. Udowodnij, że w każdym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku równy jest sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi (twierdzenie cosinusów).

Rozwiązanie:

Rozważmy trójkąt ABC, w którym $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ (ryc. 6.42). Wówczas zachodzi równość $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Zatem:

$$c^2 = \vec{c}^{\,2} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = a^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right) + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\left(180^\circ - \gamma\right) =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

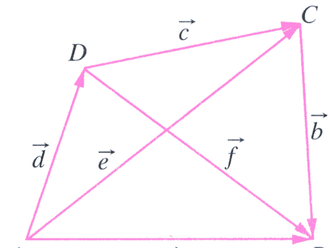


Ryc. 6.42.

Przykład 4.** Udowodnij, że czworokąt wypukły jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów długości przekątnych równa jest sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

Rozwiązanie:

Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{f}$ (ryc. 6.43). Wówczas $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{e} = \vec{d} + \vec{c}$, $\vec{f} = \vec{b} + \vec{c}$. Zatem:



Ryc. 6.43.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \iff \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + \vec{d}^{\,2} = \vec{e}^{\,2} + \vec{f}^{\,2} \iff$$

$$\iff \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + \vec{d}^{\,2} = \left(\vec{d} + \vec{c}\right)^2 + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2 \iff$$

$$\iff \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + \vec{d}^{\,2} = \vec{d}^{\,2} + 2\vec{d} \circ \vec{c} + \vec{c}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c}^{\,2} \iff$$

$$\iff \vec{a}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} + 2\vec{d} \circ \vec{c} + 2\vec{b} \circ \vec{c} \iff \vec{a}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} + 2\vec{c} \circ \left(\vec{d} + \vec{b}\right) \iff$$

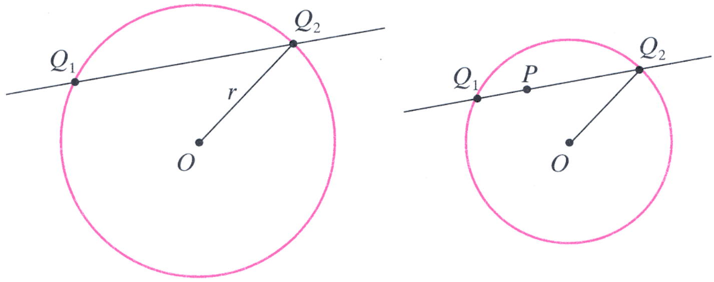
$$\iff \vec{a}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} + 2\vec{c} \circ \left(\vec{a} - \vec{c}\right) \iff \vec{a}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} + 2\vec{c} \circ \vec{a} - 2\vec{c}^{\,2} \iff$$

$$\iff \vec{a}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a}\circ\vec{c} - 2\vec{c}^{\,2} \iff \vec{a}^{\,2} = 2\vec{a}\circ\vec{c} - \vec{c}^{\,2} \iff$$

$$\iff \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\circ\vec{c} + \vec{c}^{\,2} = 0 \iff \left(\vec{a} - \vec{c}\right)^2 = 0 \iff \vec{a} - \vec{c} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{c}.$$

Ostatnia równość jest równoważna temu, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

Przykład 5.** Dane są okrąg $C(O;r)$ i punkt P. Udowodnij, że dla każdej prostej przechodzącej przez punkt P i mającej z tym okręgiem co najmniej jeden punkt wspólny iloczyn odległości punktu P od punktów przecięcia tej prostej z tym okręgiem wynosi $|OP^2 - r^2|$.



Ryc. 6.44.

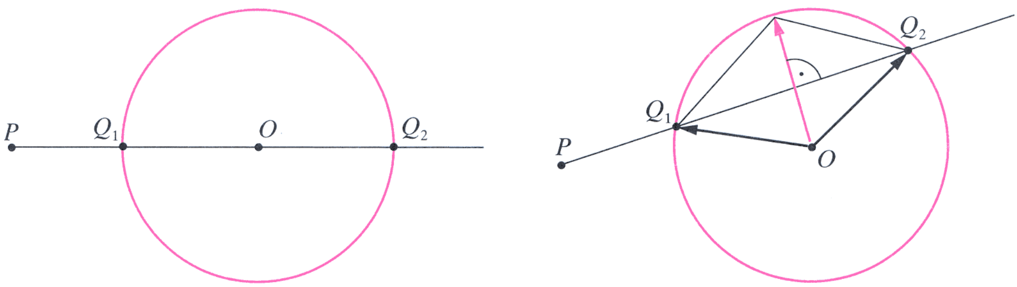
Rozwiązanie:

Należy wykazać, że (przy oznaczeniach jak na rycinie 6.44) $PQ_1 \cdot PQ_2 = |OP^2 - r^2|$. W tym celu zauważmy przede wszystkim, że $PQ_1 \cdot PQ_2 = \left|\overrightarrow{PQ_1} \circ \overrightarrow{PQ_2}\right|$, bo wektory PQ_1 i PQ_2 są równoległe.

Ponieważ $\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ_1}$ i $\overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ_2}$, więc:

$$\overrightarrow{PQ_1} \circ \overrightarrow{PQ_2} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ_1}\right) \circ \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ_2}\right) = \overrightarrow{PO}^{\,2} + \overrightarrow{PO} \circ \left(\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}\right) + \overrightarrow{OQ_1} \circ \overrightarrow{OQ_2}.$$

Ale $\overrightarrow{OQ_1} + OQ_2 = \vec{0}$ lub $\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2} \perp PQ_i$, gdy $P \neq Q_i$, bo $\overrightarrow{PQ_i} \parallel \overrightarrow{Q_1Q_2}$ $(i = 1, 2)$, co pokazuje rycina 6.45.



Ryc. 6.45.

Wobec tego otrzymujemy dalej:

$$\overrightarrow{PO}^{\,2} + \overrightarrow{PO} \circ \left(\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}\right) + \overrightarrow{OQ_1} \circ \overrightarrow{OQ_2} =$$

$$= PO^2 + \overrightarrow{PO} \circ \left(\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}\right) + \left(\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}\right) \circ \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_2}^{\,2} =$$

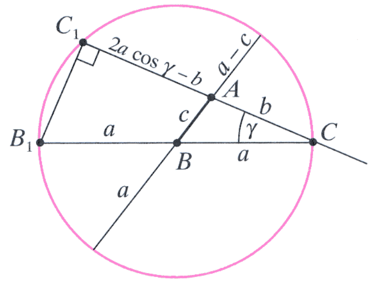
$$= PO^2 + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ_2}\right) \circ \left(\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}\right) - \overrightarrow{OQ_2}^{\,2} = PO^2 - OQ^2 = PO^2 - r^2.$$ Stąd:

$\overrightarrow{PQ_1} \circ \overrightarrow{PQ_2} = PO^2 - r^2$ i ostatecznie: $PQ_1 \cdot PQ_2 = |PO^2 - r^2|$.

Uwaga. W przykładzie tym wykazaliśmy tak zwane **twierdzenie o potędze punktu względem okręgu**.

Liczba $PO^2 - r^2$ to właśnie **potęga punktu** P względem **okręgu** $C(O;r)$. Twierdzenie o potędze punktu względem okręgu często można spotkać w literaturze matematycznej jako **twierdzenie o siecznych okręgu**.

Jako ciekawostkę zobaczmy, jak z tego twierdzenia otrzymuje się twierdzenie... cosinusów.



Ryc. 6.46.

Rozważmy dowolny trójkąt ABC oraz narysujmy okrąg o środku w wierzchołku B tego trójkąta i promieniu długości BC. Następnie przedłużmy boki BC i AC tego trójkąta do przecięcia się z danym okręgiem w punktach odpowiednio B_1 i C_1 (ryc. 6.46). Powstanie wtedy trójkąt prostokątny B_1C_1C o kącie prostym przy wierzchołku C_1. Jeśli przyjmiemy, że $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, wówczas w trójkącie prostokątnym o kącie γ przy wierzchołku C zachodzi na mocy definicji cosinusa równość: $C_1C = 2a \cdot \cos\gamma$. Stąd $C_1A = 2a\cos\gamma - b$.

Po zastosowaniu twierdzenia o potędze punktu A względem tego okręgu otrzymujemy równość: $(2a\cos\gamma - b) \cdot b = (a - c) \cdot (c + a)$, z której wynika, że:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Pytania i zadania

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio AC i BD, a punkty P i Q – środkami boków odpowiednio AB i CD. Udowodnij, że odcinki MN i PQ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $BC = AD$.
2. Udowodnij, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe.
3. Punkty K, L, M, N są środkami kolejnych boków czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że przekątne AC i BD tego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $KM = LN$.
4. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD i BE. Wykaż, że są one prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$.

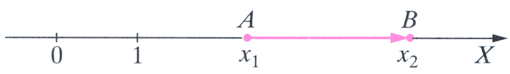
5*. Na trójkącie równobocznym ABC o boku długości 1 opisano okrąg. Udowodnij, że dla dowolnego punktu M tego okręgu zachodzi równość $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$.

6. Dane są dwa wektory $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ wyznaczające trójkąt równoboczny o boku 1. Na OA odłożono odcinek $OK = \frac{1}{4}OA$, a na OB – odcinek $OL = \frac{2}{7}OB$. Udowodnij, że wektory $\overrightarrow{BK}$ i $\overrightarrow{AL}$ są prostopadłe.

6. Wektory na osi liczbowej i na płaszczyźnie współrzędnych

6.1. Współrzędne wektora na osi liczbowej

Wektorom na osi liczbowej, podobnie jak punktom na niej, przyporządkowujemy ich współrzędne. Współrzędną wektora na osi obliczamy, odejmując od współrzędnej końca współrzędną początku. Jeśli $A=(x_1)$, $B=(x_2)$, to współrzędną wektora $\overrightarrow{AB}$ jest liczba x_2-x_1, co zapisujemy $\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1]$ (ryc. 6.47).



Ryc. 6.47.

Wektor zaczepiony w początku osi liczbowej ma więc współrzędną równą współrzędnej końca tego wektora. Z określenia współrzędnej wektora na osi wynika też, że wektor zerowy ma współrzędną na osi równą zeru: $\vec{0}=[0]$ (ryc. 6.48).

Ryc. 6.48.

Przykład 1. Jeśli $A=(-3)$, $B=(2)$, to $\overrightarrow{AB}=[2-(-3)]=[5]$ (ryc. 6.49).

Ryc. 6.49.

Można dowieść, że dwa wektory na osi liczbowej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne na tej osi też są równe. Wyznaczyć wektor na osi to wyznaczyć jego współrzędną na tej osi.

Powstaje teraz pytanie, jak wyznaczyć współrzędne sumy i różnicy wektorów na osi oraz współrzędną iloczynu wektora i liczby. Przedstawiają to następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Jeśli $\vec{u}=[a_1]$, $\vec{v}=[a_2]$, to $\vec{u}+\vec{v}=[a_1+a_2]$. Oznacza to, że suma wektorów na osi ma współrzędną równą sumie współrzędnych dodawanych wektorów.

□ Dowód. Niech $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, gdzie $A=(x_1)$, $B=(x_2)$, $C=(x_3)$. Wówczas oczywiście $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1]$, $\overrightarrow{BC}=[x_3-x_2]$, $\overrightarrow{AC}=[x_3-x_1]$, przy czym jednocześnie $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=a_2$. Ponieważ $x_3-x_1=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)$, więc rzeczywiście $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}=[x_3-x_1]=[(x_2-x_1)+(x_3-x_2)]=[a_1+a_2]$. □

Twierdzenie 2.

Jeśli $\vec{u} = [a]$, to $-\vec{u} = [-a]$. Oznacza to, że współrzędna wektora przeciwnego do wektora $\vec{u}$ jest liczbą przeciwną do współrzędnej wektora $\vec{u}$.

▢ Dowód. Rzeczywiście, jeśli $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (x_1)$, $B = (x_2)$, to $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, a ponadto $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1]$, zaś $\overrightarrow{BA} = [x_1 - x_2] = [-(x_2 - x_1)]$. ▢

Twierdzenie 3.

Jeśli $\vec{u} = [a_1]$, $\vec{v} = [a_2]$, to $\vec{u} - \vec{v} = [a_1 - a_2]$. Oznacza to, że współrzędną różnicy wektorów jest różnica współrzędnych odejmowanych wektorów.

▢ Dowód. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = [a_1] + [-a_2] = [a_1 + (-a_2)] = [a_1 - a_2]$. ▢

Twierdzenie 4.

Jeśli $\vec{u} = [a]$, to $k\vec{u} = [ka]$. Oznacza to, że aby pomnożyć wektor przez liczbę, mnożymy współrzędną tego wektora przez tę liczbę.

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Przykład 2. Dane są wektory $\vec{u} = [2]$, $\vec{v} = [-1]$. Wyznacz wektory: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u} + 5\vec{v}$, $-\vec{u} + 2\vec{v}$.
Rozwiązanie:

$$\vec{u} + \vec{v} = [2] + [-1] = [2 + (-1)] = [2 - 1] = [1],$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [2 - (-1)] = [2 + 1] = [3],$$

$$2\vec{u} + 5\vec{u} = [2 \cdot 2] + [5 \cdot (-1)] = [4] + [-5] = [4 - 5] = [-1],$$

$$-\vec{u} + 2\vec{v} = [-2] + [2 \cdot (-1)] = [-2 + (-2)] = [-4].$$

Z określenia współrzędnej wektora na osi wynika, że długość wektora równa jest wartości bezwzględnej jego współrzędnej na osi. Jeśli zatem $A = (x_1)$, $B = (x_2)$, to $|\overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1|$.

Pytania i zadania

1. Jak się określa współrzędną wektora na osi?
2. Jak się wyznacza współrzędną:

   a) sumy wektorów, b) różnicy wektorów, c) iloczynu wektora i liczby?
3. Jak obliczamy długość wektora na osi?
4. Dane są punkty: $A = (3)$, $B = (-2)$, $C = (5)$. Znajdź współrzędne i długości wektorów: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
5. Dane są punkty $A = (2)$, $B = (-1)$, $C = (3)$. Wyznacz taki punkt D, że:

   a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

6. Dane są punkty $P=(-5)$, $Q=(2)$. Znajdź taki punkt $M=(x)$, aby:
   a) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{PQ}$; b) $3\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{QM}=-7\overrightarrow{PQ}$.
7. Znajdź taki punkt $P=(x)$, aby $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$, jeśli $A=(-3)$, $B=(-2)$, $C=(4)$, $D=(9)$.

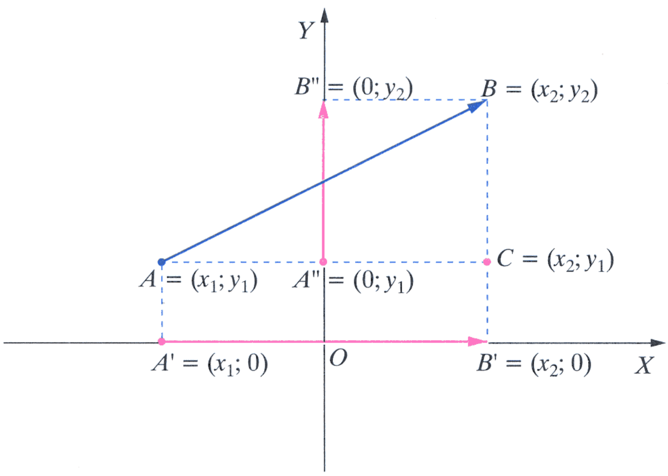
8*. Dane są punkty $A_1=(x_1)$, $A_2=(x_2)$,..., $A_n=(x_n)$. Znajdź taki punkt S, że:
   a) $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\ldots+\overrightarrow{SA_n}=\vec{0}$; b) $m_1\overrightarrow{SA_1}+m_2\overrightarrow{SA_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{SA_n}=\vec{0}$,

   gdzie $m_1, m_2,\ldots, m_n$ są danymi liczbami dodatnimi.

Uwaga. Gdy $m_1, m_2,\ldots, m_n$ są masami punktów materialnych $A_1, A_2,\ldots, A_n$, punkt S nazywa się środkiem masy zbioru tych punktów.

6.2. Współrzędne wektora na płaszczyźnie

Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych XOY rozważmy dowolny wektor $\overrightarrow{AB}$, w którym $A=(x_1;y_1)$ i $B=(x_2;y_2)$.



Ryc. 6.50.

Przedstawmy ten wektor w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy do osi OX, a drugi jest równoległy do osi OY. Spoglądając na rycinę 6.50, widzimy, że $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$, gdzie wektor $\overrightarrow{AC}$ jest równoległy do osi OX, a wektor $\overrightarrow{CB}$ jest równoległy do osi OY i $C=(x_2;y_1)$. Obierzmy teraz na płaszczyźnie XOY punkty: $A'=(x_1;0)$, $B'=(x_2;0)$, $A''=(0;y_1)$, $B''=(0;y_2)$. Zauważymy wtedy, że: $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A''B''}=\overrightarrow{CB}$.

Wektory $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{A''B''}=\overrightarrow{CB}$ mają na osiach OX i OY współrzędne odpowiednio x_2-x_1 i y_2-y_1. Liczby te przyporządkowujemy wektorowi $\overrightarrow{AB}$ jako jego współrzędne na płaszczyźnie XOY.

!

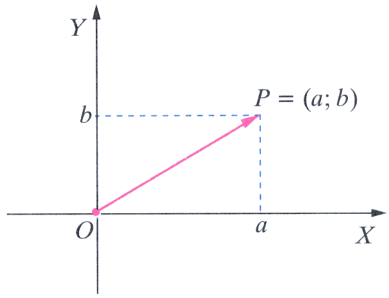
Jeśli $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, to współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy parę liczb x_2-x_1 i y_2-y_1, co zapisujemy:

$$\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1;y_2-y_1].$$

Współrzędne wektora obliczamy więc, odejmując od współrzędnych końca współrzędne początku. Jeśli dany wektor zaczepimy w początku układu współrzędnych, to jego współrzędnymi są współrzędne końca tego wektora: $\overrightarrow{OP} = [a; b]$ (ryc. 6.51).

Z określenia współrzędnych wektora na płaszczyźnie wynika, że wektor zerowy ma obie współrzędne równe zeru.

Przyjmujemy bez dowodu następujące twierdzenie:



Ryc. 6.51.

Twierdzenie 1.

Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Przykład 1. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A = (-3; 2)$, $B = (4; -1)$.
Rozwiązanie:

$\overrightarrow{AB} = [4 - (-3); -1 - 2] = [7; -3]$.

Przykład 2. Wyznacz początek wektora $\overrightarrow{AB} = [4; -2]$, którego koniec ma współrzędne $(5; 2)$.
Rozwiązanie:

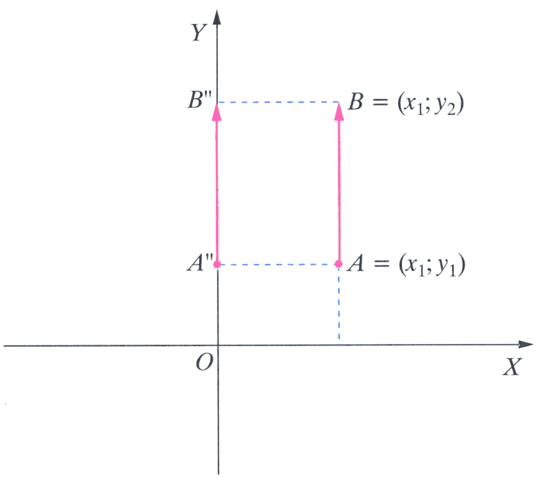
Załóżmy, że $A = (x; y)$. Z treści przykładu wiemy, że $B = (5; 2)$, więc $\overrightarrow{AB} = [5 - x; 2 - y]$. Wiemy też, że $\overrightarrow{AB} = [4; -2]$. Zatem:

$[5 - x; 2 - y] = [4; -2] \iff 5 - x = 4$ i $2 - y = -2 \iff x = 1$ i $y = 4$.

Odpowiedź: Początek wektora znajduje się w punkcie $A = (1; 4)$.

Powróćmy do wektora $\overrightarrow{AB}$, który ma współrzędne $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$. Spróbujmy teraz wyrazić jego długość w zależności od tych współrzędnych. Mogą tutaj zachodzić trzy przypadki:

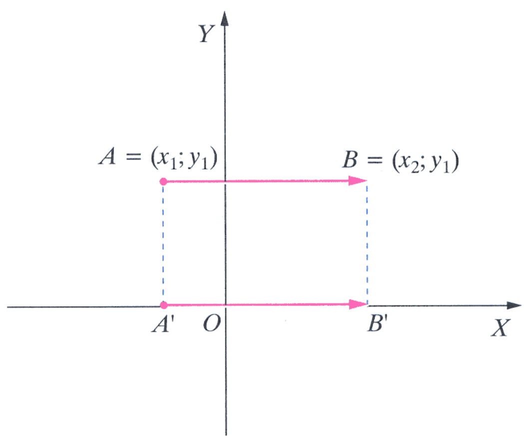
1. $x_1 = x_2$



Ryc. 6.52.

Wtedy $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A''B''}| = |y_2 - y_1|$.

2. $y_1 = y_2$



Ryc. 6.53.

Wtedy $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}| = |x_2 - x_1|$.

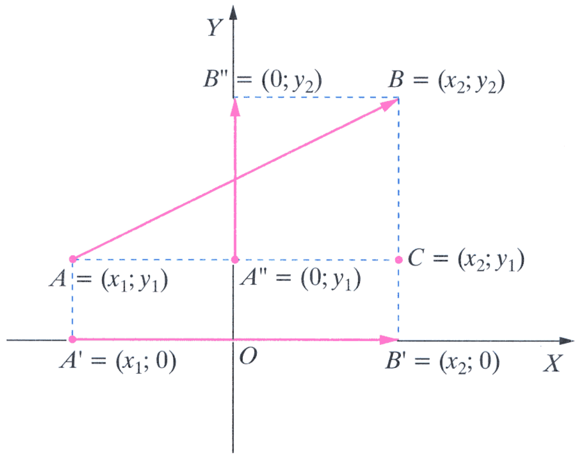
3. $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$ (ryc. 6.54).
Wówczas:

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A'B'}| = |x_2 - x_1|,$

$|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{A''B''}| = |y_2 - y_1|.$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ABC otrzymujemy:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2} =$$
$$= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

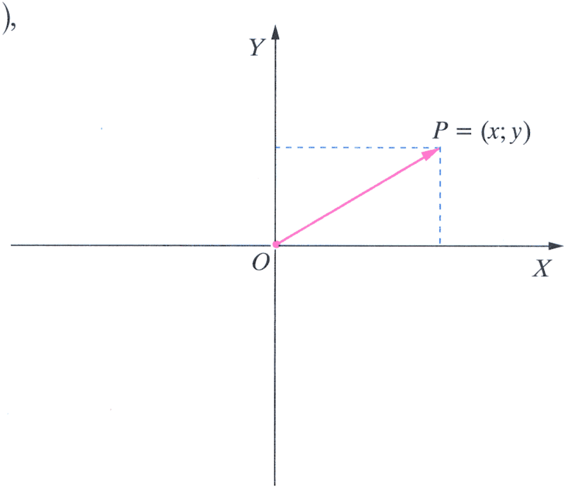


Ryc. 6.54.

Tak więc jeśli $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$,

to $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$

Oznacza to, że długość wektora równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów różnic odpowiednich współrzędnych początku i końca tego wektora. W szczególności długość wektora zaczepionego w początku układu współrzędnych (ryc. 6.55) równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów współrzędnych jego końca:



Ryc. 6.55.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Przykład 3. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, w którym $A = (-3; 1)$, $B = (1; -1)$.
Rozwiązanie:

$\overrightarrow{AB} = [1 - (-3); -1 - 1] = [4; -2]$, więc:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4^2 + 4} = \sqrt{4(4+1)} = 2\sqrt{5}.$$

Współrzędne sumy i różnicy wektorów na płaszczyźnie oraz współrzędne iloczynu wektora i liczby wyznaczamy na płaszczyźnie podobnie jak na osi liczbowej. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Jeżeli $\vec{u} = [a_1; b_1]$, $\vec{v} = [a_2; b_2]$ i k jest liczbą rzeczywistą, to:

1. $\vec{u} + \vec{v} = [a_1 + a_2; b_1 + b_2]$,
2. $\vec{u} - \vec{v} = [a_1 - a_2; b_1 - b_2]$,
3. $k\vec{u} = [ka_1; kb_1]$.

Oznacza to, że współrzędne sumy wektorów równe są sumom odpowiednich współrzędnych dodawanych wektorów, współrzędne różnicy wektorów równe są różnicom odpowiednich współrzędnych odejmowanych wektorów, zaś współrzędne iloczynu wektora i liczby równe są iloczynom współrzędnych tego wektora i tej liczby.

□ Dowód. Niech $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, gdzie $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$, $C = (x_3; y_3)$. Wówczas, oczywiście, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1; y_2 - y_1]$, $\overrightarrow{BC} = [x_3 - x_2; y_3 - y_2]$, $\overrightarrow{AC} = [x_3 - x_1; y_3 - y_1]$, przy czym jednocześnie:

$$x_2 - x_1 = a_1,\ y_2 - y_1 = b_1,$$

$$x_3 - x_2 = a_2,\ y_3 - y_2 = b_2.$$

Ponieważ:

$$x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = a_1 + a_2,$$

$$y_3 - y_1 = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) = b_1 + b_2,$$

więc rzeczywiście:

$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC} = [x_3 - x_1; y_3 - y_1] = [a_1 + a_2; b_1 + b_2].$$

Jeśli $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, to $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, a ponadto:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1; y_2 - y_1],\ \text{zaś}\ \overrightarrow{BA} = [x_1 - x_2; y_1 - y_2] = [-(x_2 - x_1); -(y_2 - y_1)].$$

Stąd $-\vec{u} = -[a_1; b_1] = [-a_1; -b_1]$.

Wobec tego:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right) = [a_1; b_1] + [-a_2; -b_2] = [a_1 - a_2; b_1 - b_2].$$ □

Dowód równości $k\vec{u} = k \cdot [a_1; b_1] = [ka_1; kb_1]$ pomijamy.

Przykład 4. Dane są wektory: $\vec{u} = [4; -2]$, $\vec{v} = [-3; 1]$. Wyznacz wektory: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Rozwiązanie:

$$\vec{u} + \vec{v} = [4; -2] + [-3; 1] = [4 - 3; -2 + 1] = [1; -1],$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [4; -2] - [-3; 1] = [4 - (-3); -2 - 1] = [7; -3],$$

$$2\vec{u} - \vec{v} = 2[4; -2] - [-3; 1] = [8; -4] - [-3; 1] = [8 + 3; -4 - 1] = [11; -5],$$

$$-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = -[4; -2] + \frac{1}{2}[-3; 1] = \left[-4 - \frac{3}{2}; 2 + \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right].$$

Pytania i zadania

1. Jak się określa współrzędne wektora na płaszczyźnie?
2. Jak obliczamy długość wektora na płaszczyźnie?
3. Omów, w jaki sposób wyznacza się współrzędne:

   a) sumy wektorów, b) różnicy wektorów, c) iloczynu wektora przez liczbę.

4. Dane są punkty: $A=(1;3)$, $B=(3;2)$, $C=(-1;1)$, $D=(0;1)$, $E=(0;0)$. Wyznacz współrzędne wektorów: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$.
5. Wykreśl wektor:

   a) $[-1;2]$; b) $[2;-3]$; c) $[0;-4]$; d) $[5;0]$.

6. Znajdź koniec wektora $\overrightarrow{AB}$, gdy $A=(2;-3)$ oraz:

   a) $\overrightarrow{AB}=[-2;3]$; b) $\overrightarrow{AB}=[1;1]$; c) $\overrightarrow{AB}=[1;-3]$.

7. Dane są punkty: $A=(3;-1)$, $B=(5;2)$, $C=(1;4)$. Znajdź wierzchołki D, E i F równoległoboków: $ABCD$, $BCAE$ i $CABF$.
8. Mniejszą podstawą trapezu $ABCD$ jest bok AB, gdzie $A=(3;2)$, $B=(2;-1)$. Podstawa CD jest dwa razy dłuższa od AB i ma środek $S=(1;1)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki trapezu.

9*. Dane są punkty: $A_1=(x_1;y_1)$, $A_2=(x_2;y_2)$,..., $A_n=(x_n;y_n)$. Znajdź taki punkt $S=(x;y)$, że:

   a) $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\ldots+\overrightarrow{SA_n}=\vec{0}$;

   b) $m_1\cdot\overrightarrow{SA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{SA_2}+\ldots+m_n\cdot\overrightarrow{SA_n}=\vec{0}$, gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ są danymi liczbami dodatnimi. Punkt S nazywa się środkiem masy układu punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

10**. Udowodnij, że jeżeli w danym układzie punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ zastąpimy punkty $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ich środkiem masy T, nadając mu masę $m_1+m_2+\ldots+m_k$, to układ punktów $T, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ma ten sam środek masy S, co układ dany.

11. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$, jeśli $A=(0;-1)$, $B=(3;2)$, $C=(2;4)$, $D=(-1;1)$. Jaki to czworokąt?
12. Oblicz obwód trójkąta ABC, jeśli $A=(0;2)$, $B=(-4;-1)$, $C=(3;2)$.
13. Oblicz długości przekątnych czworokąta $ABCD$, jeśli $A=(-1;0)$, $B=(3;2)$, $C=(2;4)$, $D=(-2;2)$.

6.3. Stosunek podziału wektora

Rozważmy na płaszczyźnie niezerowy wektor $\overrightarrow{AB}$ i punkt P prostej AB, różny od punktu B (ryc. 6.56).

Ryc. 6.56.

Stosunkiem podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ punktem P (lub w punkcie P) nazywamy taką liczbę rzeczywistą k, że:

$$(*)\ \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{PB}.$$

Liczba k o własności $(*)$ jest równa:

– stosunkowi $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ długości wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{PB}$, gdy wektory $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{PB}$ mają zgodne zwroty;

– stosunkowi $-\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$, czyli liczbie przeciwnej do stosunku długości wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{PB}$, gdy zwroty tych wektorów są przeciwne;

– zeru, gdy punkty P i A się pokrywają.

Istnieje tylko jedna taka liczba k.

Przykład 1. Liczba 1 jest stosunkiem podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ środkiem S odcinka AB (ryc. 6.57).

Ryc. 6.57.

Przykład 2. Liczba –2 jest stosunkiem podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ takim punktem P prostej AB, że $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$ (ryc. 6.58).

Ryc. 6.58.

Przykład 3. Liczba 0 jest stosunkiem podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ punktem A, zaś stosunek podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ punktem B nie istnieje.

Przykład 4. Dane są dwa punkty $A = (x_1; y_1)$ i $B = (x_2; y_2)$ oraz liczba k. Wyznacz punkt P dzielący wektor $\overrightarrow{AB}$ w stosunku k.

Rozwiązanie:

Należy wyznaczyć współrzędne takiego punku P, aby zachodziła równość:

$$(*)\ \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{PB}.$$

Przyjmijmy, że $P = (x; y)$. Wtedy $\overrightarrow{AP} = [x - x_1; y - y_1]$, zaś $\overrightarrow{PB} = [x_2 - x; y_2 - y]$.

Wobec tego:

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{PB} \iff [x - x_1; y - y_1] = k \cdot [x_2 - x; y_2 - y] \iff$$

$$\iff [x - x_1; y - y_1] = [k(x_2 - x); k(y_2 - y)] \iff$$

$$\iff x - x_1 = k(x_2 - x) \text{ i } y - y_1 = k(y_2 - y) \iff$$

$$\iff (k+1)x = x_1 + kx_2 \text{ i } (k+1)y = y_1 + ky_2.$$

Stąd $x = \dfrac{x_1 + kx_2}{k+1}$ i $y = \dfrac{y_1 + ky_2}{k+1}$, gdy $k \neq -1$. Jeśli $k = -1$, taki punkt $P = (x; y)$, by zachodziła równość $(*)$, nie istnieje.

Odpowiedź: Gdy $k \neq -1$, istnieje jeden punkt P dzielący wektor $\overrightarrow{AB}$ w stosunku k, mianowicie jeśli $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, to $P=\left(\frac{x_1+kx_2}{k+1};\frac{y_1+ky_2}{k+1}\right)$. Gdy zaś $k=-1$, taki punkt nie istnieje.

Uwaga. Gdy $k=1$, to $P=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Wniosek. Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi współrzędnych jego końców.

Pytania i zadania

1. Co to jest stosunek podziału wektora punktem?
2. Wyznacz współrzędne punktu dzielącego w stosunku $k \neq -1$ dany niezerowy wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$.
3. Podaj współrzędne środka odcinka.
4. Znajdź stosunek podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ o końcach $A=(-7;0)$, $B=(1;0)$ każdym z punktów: $C=(-5;0)$, $D=(0;0)$, $E=(9;0)$.
5. Znajdź punkt dzielący wektor $\overrightarrow{AB}$ o końcach $A=(-3;1)$, $B=(2;-2)$ w stosunku:
   a) 4; b) $\frac{1}{4}$; c) -4; d) $-\frac{1}{4}$.
6. Wyznacz współrzędne środków boków trójkąta ABC, gdy $A=(8;2)$, $B=(4;6)$, $C=(-2;-2)$.
7. Niech $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, $C=(x_3;y_3)$ będą wierzchołkami trójkąta, a punkty A', B i C' – środkami boków BC, CA i AB. Znajdź punkty dzielące wektory $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ w stosunku 2. Jakie twierdzenie o środkowych trójkąta można stąd wyprowadzić?
8. Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta w zależności od współrzędnych jego wierzchołków.

9*. Wykaż metodą współrzędnych, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

10*. Udowodnij metodą współrzędnych, że środki kolejnych boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

11*. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ połączono odcinkami: środki P i R boków AB i CD, środki Q i S boków BC i DE oraz środki X i Y odcinków PR i QS. Wykaż metodą współrzędnych, że $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

6.4. Iloczyn skalarny wektorów w układzie współrzędnych

Iloczyn skalarny wektorów można określić jeszcze w inny sposób:

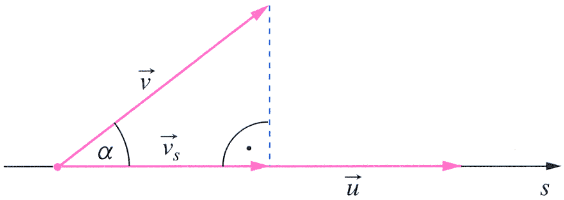
Twierdzenie

Iloczyn skalarny wektorów jest równy iloczynowi długości jednego z wektorów i współrzędnej rzutu prostokątnego drugiego wektora na oś o kierunku i zwrocie wektora pierwszego.

▢ Dowód. Rozważmy dowolne dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, których iloczyn skalarny jest różny od zera.

Niech s będzie osią o kierunku i zwrocie na przykład wektora $\vec{u}$, zaś $\vec{v_s}$ niech oznacza rzut prostokątny wektora $\vec{v}$ na tę oś (ryc. 6.59), natomiast v – współrzędną wektora $\vec{v_s}$ na osi s. Wówczas:

$$(*)\ v = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha, \text{ gdzie } \alpha = \sphericalangle(\vec{u}; \vec{v}).$$

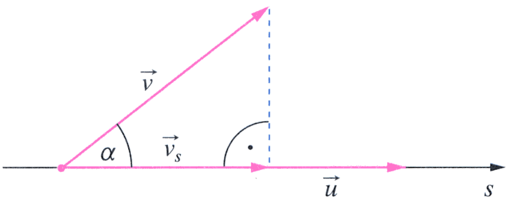


Ryc. 6.59.

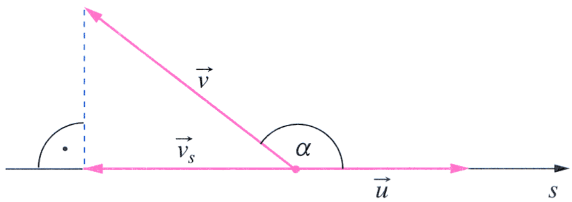
Istotnie, gdy α jest kątem ostrym (ryc. 6.60), wzór $(*)$ wynika wprost z definicji cosinusa: $|\vec{v_s}| = v$, więc $\cos\alpha = \frac{v}{|\vec{v}|}$, skąd $v = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$.

Gdy α jest kątem rozwartym (ryc. 6.61), wtedy $|\vec{v_s}| = -v$ i wówczas:

$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{|\vec{v_s}|}{|\vec{v}|} = -\frac{-v}{|\vec{v}|} = \frac{v}{|\vec{v}|}, \text{ skąd } v = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$



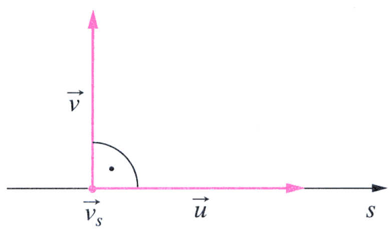
Ryc. 6.60.



Ryc. 6.61.

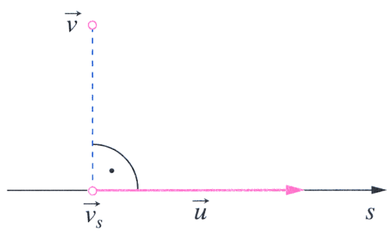
Jeśli iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest równy zeru, to:

– albo wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe (ryc. 6.62) i równość $(*)$ oczywiście zachodzi, bo $\vec{v_s} = \vec{0}$, więc $v = 0$ i $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$;



Ryc. 6.62.

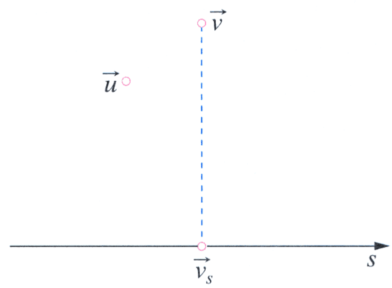
– albo któryś z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest zerowy, na przykład gdy $\vec{v} = \vec{0}$ i $\vec{u} \neq \vec{0}$ (ryc. 6.63), wtedy również zachodzi równość $(*)$, ponieważ $|\vec{u}| \cdot v = 0$ oraz $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.



Ryc. 6.63.

Wreszcie, gdy $\vec{u} = \vec{0}$ i $\vec{v} = \vec{0}$, wtedy także zachodzi równość (∗), bo wektor zerowy przyjmujemy jako równoległy do każdej prostej, więc obierając dowolną oś s i rzutując na nią na przykład wektor $\vec{v}$ (ryc. 6.64), otrzymamy $|\vec{u}| \cdot v = 0$, a przecież $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □



Ryc. 6.64.

Powróćmy teraz do dwóch własności iloczynu skalarnego wektorów, które przyjęliśmy wcześniej bez dowodu. Przypomnijmy twierdzenie:

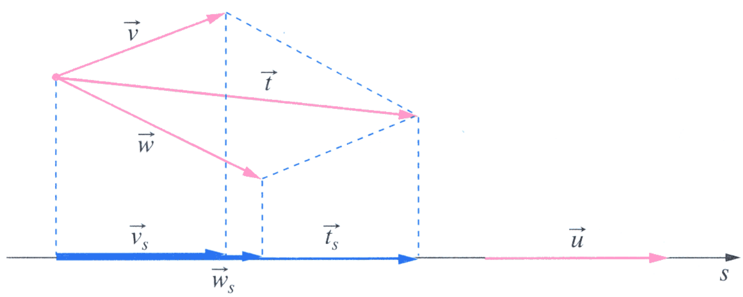
Twierdzenie

Mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania wektorów. Oznacza to, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zachodzi równość:

$$(*)\ \vec{u} \circ (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}.$$

□ Dowód.

1. Gdy wektor $\vec{u}$ jest zerowy, wówczas twierdzenie jest oczywiste (obie strony równości (∗) są równe zeru).
2. Niech wektor $\vec{u}$ będzie niezerowy. Przez v, w i t oznaczmy współrzędne rzutów $\vec{v}_s$, $\vec{w}_s$ i $\vec{t}_s$ odpowiednio wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{t} = \vec{v} + \vec{w}$ na oś s o kierunku i zwrocie wektora $\vec{u}$ (ryc. 6.65).



Ryc. 6.65.

Na mocy poprzedniego twierdzenia dla wektorów $\vec{u}$ i $\vec{t}$ zachodzi równość:

$\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot t.$

Widzimy też, że $\vec{t}_s = \vec{v}_s + \vec{w}_s$, więc $t = v + w$, wobec czego $\vec{u} \circ (\vec{u} + \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot (v + w)$ i ostatecznie $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot v + |\vec{u}| \cdot w$. A ponieważ $|\vec{u}| \cdot v = \vec{u} \circ \vec{v}$ i $|\vec{u}| \cdot w = \vec{u} \circ \vec{w}$, więc rzeczywiście:

$\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}.$

Dowód twierdzenia został zakończony. □

Twierdzenie

Mnożenie skalarne wektorów ma własność tak zwanej łączności mieszanej. Oznacza to, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz liczb a i b zachodzi równość:

$$(**)\ \left(a\vec{u}\right)\circ\left(b\vec{v}\right)=(ab)\left(\vec{u}\circ\vec{v}\right).$$

☐ Dowód.

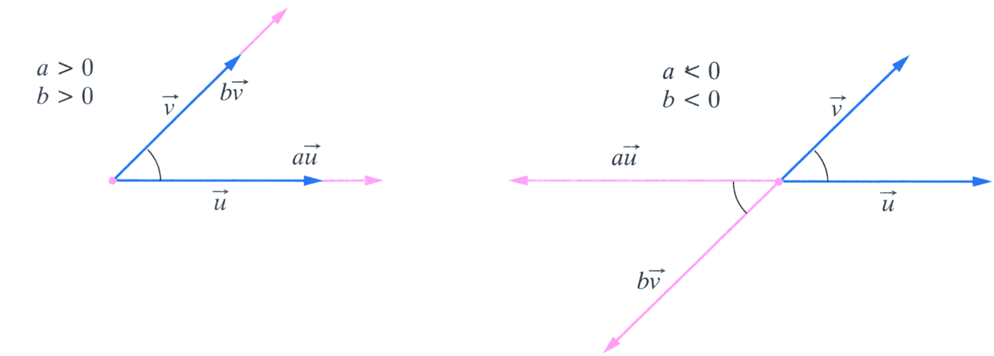
1. Jeśli $ab=0$ lub $\vec{u}=\vec{0}$, lub $\vec{v}=\vec{0}$, to twierdzenie jest oczywiste.
2. Niech więc $ab\neq 0$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ i $\vec{v}\neq\vec{0}$. Wówczas na mocy definicji iloczynu skalarnego wektorów:

$$\left(a\vec{u}\right)\circ\left(b\vec{v}\right)=\left|a\vec{u}\right|\cdot\left|b\vec{v}\right|\cdot\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right).$$

Ale $\left|a\vec{u}\right|=|a|\cdot\left|\vec{u}\right|$, $\left|b\vec{v}\right|=|b|\cdot\left|\vec{v}\right|$, zaś:

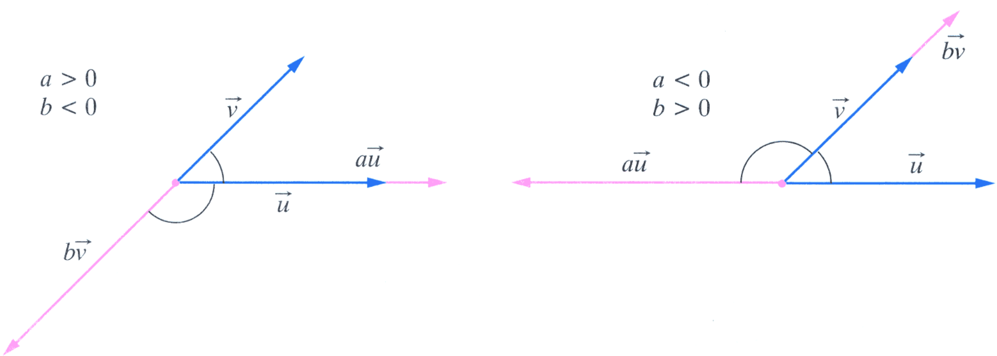
$$\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=\begin{cases}\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right), & \text{gdy}\quad ab>0\quad(\text{ryc. }6.66)\\ 180^\circ-\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right), & \text{gdy}\quad ab<0\quad(\text{ryc. }6.67)\end{cases}$$

$ab>0$



Ryc. 6.66.

$ab<0$



Ryc. 6.67.

Stąd albo:

$\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)$, albo:

$\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=-\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)$. Zatem:

$$|a\vec{u}|\cdot|b\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=$$

$$=|a|\cdot|\vec{u}|\cdot|b|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=$$

$$=|a|\cdot|b|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=$$

$$=|a\cdot b|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=$$

$$=\begin{cases}a\cdot b\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right), & \text{gdy} \quad ab>0\\ -a\cdot b\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\left(-\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right), & \text{gdy} \quad ab<0\end{cases}$$

i ostatecznie:

$$|a\vec{u}|\cdot|b\vec{u}|\cdot\cos\sphericalangle\left(a\vec{u};b\vec{v}\right)=ab|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)=ab\left(\vec{u}\circ\vec{v}\right).$$

Kończy to dowód równości $(**)$. ▢

Rozważmy teraz wektory $\vec{i}_1=[1;0]$, $\vec{i}_2=[0;1]$.

Nazywamy je **wektorami jednostkowymi** albo krótko **wersorami** odpowiednio osi OX i OY. Są one prostopadłe i długości 1. Zauważmy teraz, że każdy wektor $\vec{u}=[a_1;a_2]$ można przedstawić w postaci $\vec{u}=a_1\cdot\vec{i}_1+a_2\cdot\vec{i}_2$, bowiem:

$$\vec{u}=[a_1;a_2]=[a_1;0]+[0;a_2]=a_1\cdot[1;0]+a_2\cdot[0;1]=a_1\cdot\vec{i}_1+a_2\cdot\vec{i}_2.$$

Stąd można wyprowadzić następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli $\vec{u}=[a_1;a_2]$, $\vec{v}=[b_1;b_2]$, to $\vec{u}\circ\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2$.

▢ Dowód. Ponieważ $\vec{u}=a_1\cdot\vec{i}_1+a_2\vec{i}_2$, $\vec{v}=b_1\vec{i}_1+b_2\vec{i}_2$ oraz $\vec{i}_1\circ\vec{i}_2=0$, $\vec{i}_1^{\,2}=1$, $\vec{i}_2^{\,2}=1$, więc:

$$\vec{u}\circ\vec{v}=\left(a_1\vec{i}_1+a_2\vec{i}_2\right)\circ\left(b_1\vec{i}_1+b_2\vec{i}_2\right)=a_1b_1\vec{i}_1^{\,2}+a_1b_2\vec{i}_1\circ\vec{i}_2+a_2b_1\vec{i}_1\circ\vec{i}_2+a_2b_2\vec{i}_2^{\,2}=$$

$$=a_1b_1+a_2b_2.$$ ▢

Twierdzenie to daje nam wzór na iloczyn skalarny wektorów, gdy znamy ich współrzędne. Posługując się tym wzorem, można znacznie uprościć dowody własności iloczynu skalarnego wektorów. Dla przykładu wykażemy raz jeszcze własność rozdzielności mnożenia skalarnego wektorów względem ich dodawania.

Niech $\vec{u}=[a_1;a_2]$, $\vec{v}=[b_1;b_2]$, $\vec{w}=[c_1;c_2]$. Wówczas:

$$\vec{u}\circ\left(\vec{u}+\vec{w}\right)=[a_1;a_2]\circ([b_1;b_2]+[c_1;c_2])=$$

$$=[a_1;a_2]\circ[b_1+c_1;b_2+c_2]=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)=$$

$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=$$

$$=[a_1;a_2]\circ[b_1;b_2]+[a_1;a_2]\circ[c_1;c_2]=\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{u}\circ\vec{w}.$$

Pytania i zadania

1. Jak wyraża się iloczyn skalarny wektorów, gdy dane są ich współrzędne?
2. Oblicz iloczyn skalarny wektorów:

   a) $[2;-4]$ i $[3;5]$; b) $[6;0]$ i $[0;6]$;

   c) $[-7;3]$ i $[6;14]$; d) $[1;2]$ i $[-1;-2]$.
3. Wyznacz kąt wektorów:

   a) $[2;-3]$ i $[1;5]$; b) $\left[1;\sqrt{3}\right]$ i $\left[-1;\sqrt{3}\right]$;

   c) $[4;-2]$ i $\left[1;\frac{1}{2}\right]$; d) $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ i $[6;1]$.
4. Wykaż metodą współrzędnych własność łączności mieszanej iloczynu skalarnego wektorów.
5. Wyznacz kąty trójkąta ABC o wierzchołkach:

   a) $A=(3;2)$, $B=(2;3)$, $C=(-1;0)$;

   b) $A=(1;3)$, $B=(0;4)$, $C=(-3;1)$.
6. Wykaż, że przekątne czworokąta $ABCD$, w którym $A=(1;0)$, $B=(2;3)$, $C=(-2;-1)$, $D=(-3;4)$, są prostopadłe.
7. Oblicz:

   a) $\left(\vec{i}_1+\vec{i}_2\right)\circ\left(\vec{i}_1-\vec{i}_2\right)$; b) $\left(2\vec{i}_1+3\vec{i}_2\right)\circ\left(3\vec{i}_1-2\vec{i}_2\right)$.
8. Dane są wektory: $\vec{u}=[2;-4]$, $\vec{u}=[-3;5]$. Oblicz:

   a) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$; b) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$; c) $\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)\circ\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)$.
9. Dane są punkty: $A=(2;-3)$, $B=(4;0)$, $C=(1;4)$, $D=(11;1)$. Oblicz:

   a) $\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CD}$;

   d) $\left(\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BD}\right)^2$; e) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\circ\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$.
10. Dla jakich wartości p punkty: $A=(2;2)$, $B=(4;0)$, $C=(0;p)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

11*. Znajdź rzut wektora $\vec{u}$ na oś o kierunku wektora $\vec{v}$, gdy $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=3$ i $\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)=60°$.

12*. Znajdź rzut wektora $\vec{u} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$ na oś o kierunku wektora $\vec{v} = -2\vec{m}$, jeśli $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ i $\vec{m} \perp \vec{n}$.

13*. Znajdź rzut wektora $\vec{u} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$ na oś o kierunku wektora $\vec{v} = -\vec{m} + \vec{n}$, gdy $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{m}; \vec{n}) = 60°$.

14. Dany jest wektor $\vec{u} = [3; -4]$. Znajdź wektor jednostkowy, równoległy do wektora $\vec{u}$.

15. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki: $A = (0; 0)$, $B = (3; 1)$, $D = (-1; 1)$. Wyznacz wierzchołek C oraz środek symetrii tego równoległoboku.

16. Dane są wektory: $\vec{a} = [1; 1]$, $\vec{b} = [-1; 2]$, $\vec{c} = [2; 5]$. Dla jakich liczb x i y z wektorów $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, $\vec{c}$ można zbudować trójkąt?

17. Znajdź kąty trójkąta ABC, w którym: $A = (2; -1)$, $B = (1; 3)$, $C = (-1; 1)$.

18. Wykaż, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (5; -4)$, $B = (3; 2)$, $C = (2; -5)$ jest prostokątny.

19. Punkt $S = (0; 0)$ jest środkiem AD równoległoboku $ABCD$. Wiadomo też, że $\overrightarrow{AB} = [4; 3]$, $\overrightarrow{BC} = [6; 2]$. Wyznacz wierzchołki tego równoległoboku.

VII. Przekształcenia geometryczne płaszczyzny

Gdy omawialiśmy w klasie pierwszej funkcje, to zbiory, na których je określaliśmy, jak również zbiory ich wartości, mogły być zupełnie dowolne, byle nie puste. Obecnie będziemy się zajmować funkcjami, których argumentami i wartościami są punkty płaszczyzny. Funkcje takie nazywamy **przekształceniami geometrycznymi płaszczyzny**.

1. Pojęcie przekształcenia geometrycznego. Przykłady przekształceń geometrycznych

Przekształcenie geometryczne punktowi P przyporządkowuje punkt P', zwany obrazem punktu P w tym przekształceniu. Określenie przekształcenia geometrycznego polegać będzie zawsze na podaniu przepisu, według którego mając dowolnie obrany punkt, znajdziemy obraz tego punktu.

Przekształceniem geometrycznym płaszczyzny nazywamy jakiekolwiek przyporządkowanie każdemu jej punktowi P pewnego jej punktu P'.

Punkt P' nazywamy **obrazem punktu** P w danym przekształceniu geometrycznym.

Przekształcenia geometryczne płaszczyzny nazywać będziemy krótko: przekształceniami i oznaczać dużymi literami alfabetu łacińskiego, na przykład: T, S, U, I, J itd.

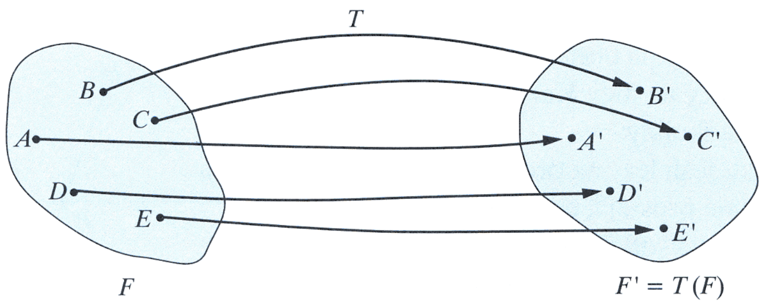
Zdanie: „Punkt P' jest obrazem punktu P w przekształceniu T" zapiszemy (ryc. 7.1):

$$P' = T(P).$$

Ryc. 7.1.

Figurę F' utworzoną z obrazów wszystkich punktów figury F w przekształceniu T nazywamy **obrazem figury** F w tym przekształceniu (ryc. 7.2), co zapisujemy:

$$F' = T(F).$$



Ryc. 7.2.

Jeżeli każdy punkt figury F' odpowiada tylko jednemu punktowi figury F w przekształceniu T, to nazywamy je **przekształceniem wzajemnie jednoznacznym** figury F na F'. Przekształcenie T, w którym obrazem figury F jest ona sama, nazywamy **przekształceniem własnym** tej figury:

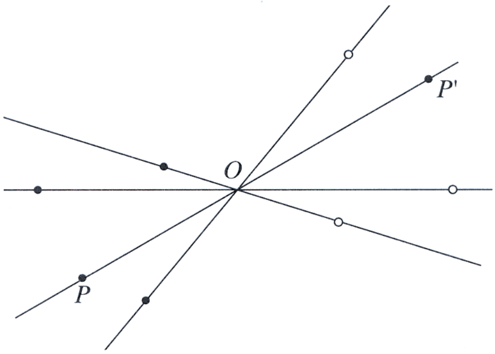
$$F' = T(F).$$

W przekształceniu własnym figury F każdy jej punkt jest obrazem pewnego jej punktu.

Przykłady przekształceń geometrycznych

Przykład 1. Wybierzmy na płaszczyźnie punkt O i każdemu punktowi P, różnemu od O, przyporządkujmy na prostej OP taki punkt P' po przeciwnej stronie punktu O niż punkt P, że $OP' = OP$, zaś punktowi O – ten sam punkt (ryc. 7.3). W przekształceniu tym każdy punkt płaszczyzny jest obrazem tylko jednego jej punktu.

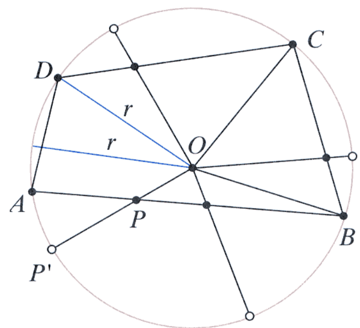
Opisane tutaj przekształcenie geometryczne płaszczyzny to dobrze wam znana (jeszcze z gimnazjum) symetria środkowa, którą szerzej omówimy niebawem.



Ryc. 7.3.

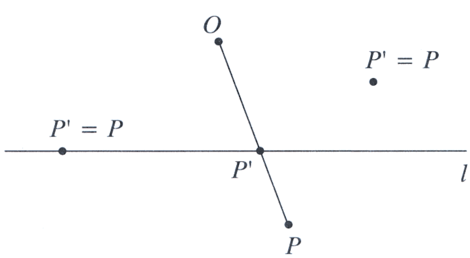
Przykład 2. Rozważmy na płaszczyźnie okrąg o środku O i promieniu długości r oraz czworokąt $ABCD$ wpisany w ten okrąg (ryc. 7.4) i załóżmy, że punkt O leży wewnątrz tego czworokąta.

Połączmy dowolny punkt P brzegu tego czworokąta ze środkiem okręgu i przez P' oznaczmy punkt przecięcia półprostej $\overrightarrow{OP}$ z danym okręgiem. W ten sposób przyporządkujemy każdemu punktowi P brzegu czworokąta pewien punkt P' okręgu opisanego na tym czworokącie. W otrzymanym przekształceniu brzegu czworokąta na okrąg obrazem brzegu tego czworokąta jest okrąg, obrazem boku czworokąta odpowiedni łuk okręgu, obrazem zaś każdego wierzchołka ten sam wierzchołek. Jest to przykład przekształcenia geometrycznego figury (brzegu czworokąta) na figurę (okrąg opisany na tym czworokącie).



Ryc. 7.4.

Przykład 3. Obierzmy na płaszczyźnie prostą l i punkt O nieleżący na niej. Każdemu punktowi P przyporządkujmy:
- ten sam punkt, jeśli leży na prostej l lub po tej samej stronie prostej l, co punkt O;
- punkt przecięcia P' odcinka OP z prostą l, gdy P leży po przeciwnej stronie prostej l niż punkt O (ryc. 7.5).

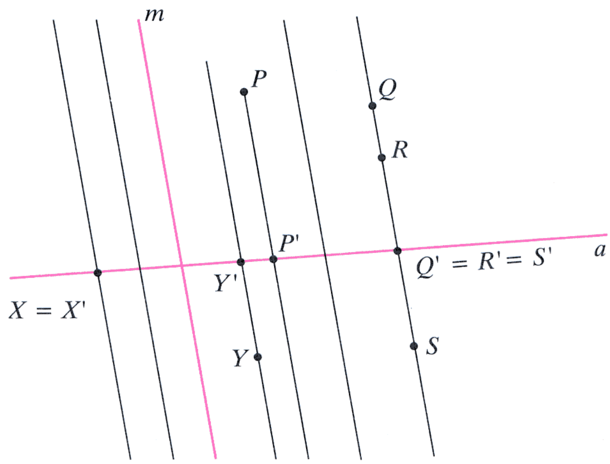


Ryc. 7.5.

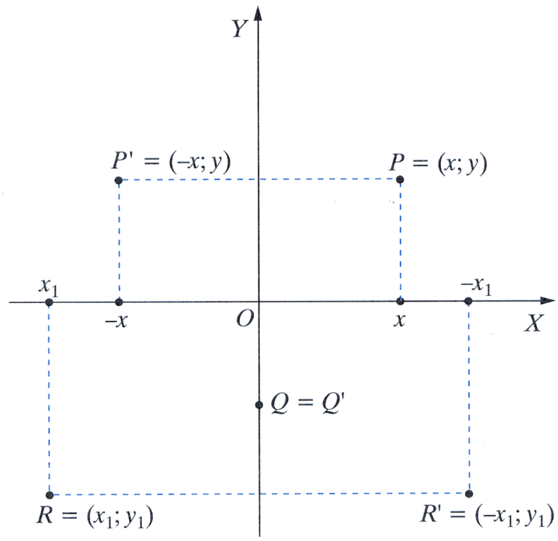
W przekształceniu tym obrazem płaszczyzny jest półpłaszczyzna zawierająca punkt O.

Przykład 4. Rozważmy na płaszczyźnie dwie proste m i a przecinające się. Każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkujmy punkt przecięcia P' prostej a z prostą równoległą do m i przechodzącą przez punkt P (ryc. 7.6). Otrzymamy w ten sposób kolejne przekształcenie płaszczyzny na prostą.

Przykład 5. Rozważmy płaszczyznę z prostokątnym układem współrzędnych. Każdemu punktowi $P=(x;y)$ przyporządkujmy punkt $P'=(-x;y)$, czyli w przekształceniu tym każdemu punktowi odpowiada punkt o przeciwnej odciętej niż ten punkt (ryc. 7.7). Widzimy więc, że w przekształceniu tym obrazem osi OY jest oś OY, a obrazem każdej z półpłaszczyzn, na które dzieli ona płaszczyznę XOY – półpłaszczyzna dopełniająca ją do całej płaszczyzny.



Ryc. 7.6.



Ryc. 7.7.

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij, co to jest przekształcenie geometryczne.
2. Jakie przekształcenie nazywamy wzajemnie jednoznacznym? Wskaż, które z przekształceń opisanych w przykładach 1–5 jest wzajemnie jednoznaczne.
3. Wyjaśnij, co to jest przekształcenie własne figury.
4. Czym jest obraz: odcinka, półprostej i prostej w przekształceniu opisanym w przykładzie 3?
5. Rozstrzygnij, które z poniższych przekształceń płaszczyzny XOY jest wzajemnie jednoznaczne:

   a) $T((x;y))=(x+2;y)$;   b) $S((x;y))=(x-1;y-2)$;

   c) $U((x;y))=(x;2)$;   d) $I((x;y))=(2x-1;3y+1)$.

2. Punkty stałe przekształcenia geometrycznego. Przekształcenie tożsamościowe. Składanie i odwracanie przekształceń

Powróćmy do przekształceń opisanych w przykładach 1–5. W każdym z nich bez trudu wskażemy takie punkty, które w tych przekształceniach są swoimi obrazami. W przekształceniu opisanym w przykładzie 1. takim punktem jest O, w przykładzie 2. są nimi wierzchołki czworokąta $ABCD$, w przykładzie 3. – punkty półpłaszczyzny zawierającej punkt O, w przykładzie 4. – punkty prostej a, w przykładzie 5. – punkty osi OY.

Punkt, który jest **swoim obrazem** w przekształceniu, nazywamy punktem **stałym** tego przekształcenia. Tak więc P jest punktem stałym przekształcenia T wtedy i tylko wtedy, gdy $T(P) = P$ (ryc.7.8).

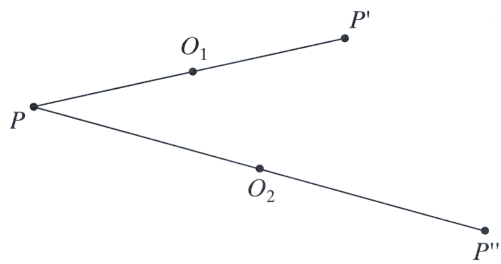
Ryc. 7.8.

Jeśli w pewnym przekształceniu wszystkie punkty są stałe, to takie przekształcenie nazywamy tożsamościowym. Będziemy je oznaczać symbolem I_O.

Przekształceniem tożsamościowym figury F nazywamy przekształcenie, w którym **każdy** punkt F jest **swoim** obrazem.

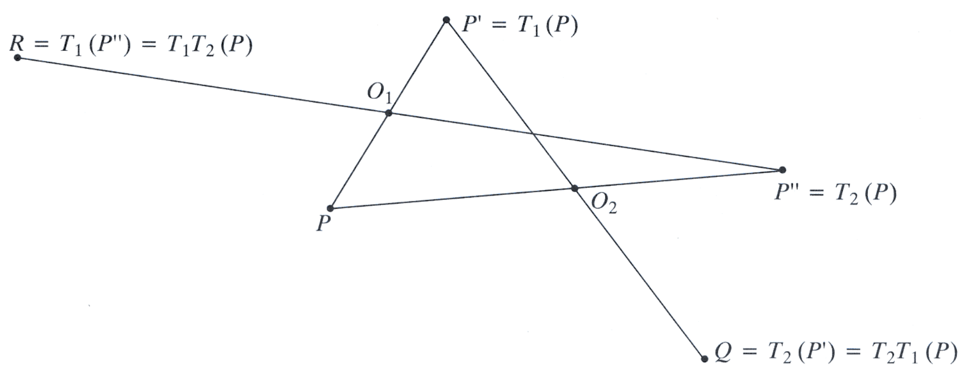
Zatem przekształcenie tożsamościowe figury jest jednym z jej przekształceń własnych.

Obierzmy na płaszczyźnie dwa punkty: O_1 i O_2. Dowolnemu punktowi P na płaszczyźnie przyporządkujmy na prostej PO_1 różny od niego punkt P' taki, że $O_1P' = O_1P$ (ryc. 7.9). Opisane w ten sposób przekształcenie płaszczyzny oznaczmy przez T_1. Podobnie przez T_2 oznaczmy przekształcenie, w którym punktowi P odpowiada różny od niego punkt P'' prostej PO_2 taki, że $O_2P'' = PO_2$.



Ryc. 7.9.

Gdybyśmy teraz wykonali kolejne przekształcenia T_1 i T_2, przyporządkowując najpierw punktowi P punkt $P' = T_1(P)$, a następnie punktowi P' punkt $Q = T_2(P')$, wówczas otrzymalibyśmy nowe przekształcenie, które nazywamy **złożeniem** lub **iloczynem** przekształceń T_1 i T_2 i oznaczamy je przez T_2T_1 (ryc. 7.10). W przekształceniu tym obrazem punktu P jest punkt Q.



Ryc. 7.10.

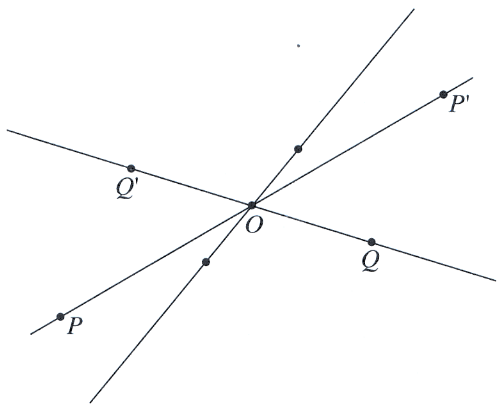
Jeżeli przekształcenia T_1 i T_2 wykonamy w odwrotnej kolejności, to otrzymane przekształcenie będzie złożeniem przekształceń T_2 i T_1 i oznaczymy je przez $T_1 T_2$. W przekształceniu tym przyporządkowujemy kolejno punktowi P punkt $P'' = T_2(P)$, a następnie punktowi P'' punkt $R = T_1(P'')$, otrzymując punkt R, różny od Q, jako obraz punktu P w przekształceniu $T_1 T_2$.

Złożeniem lub **iloczynem przekształceń** T i S nazywamy przekształcenie ST otrzymane przez wykonanie kolejno przekształcenia T i przekształcenia S.

!

Ponieważ iloczyny przekształceń ST i TS określają na ogół różne przekształcenia (o czym wiemy z nauki o funkcjach, bowiem składanie funkcji nie jest przemienne), nie jest więc obojętna kolejność liter w oznaczeniu złożenia przekształceń. Pamiętajmy zatem, że kolejność jest następująca: jako pierwsze zapisujemy przekształcenie późniejsze, a na drugim miejscu przekształcenie wcześniejsze.

W przekształceniu opisanym w przykładzie 1. każdy punkt P' płaszczyzny odpowiada tylko jednemu jej punktowi P, którego jest obrazem; wystarczy w tym celu poprowadzić prostą OP' (ryc. 7.11) i odłożyć na niej od punktu O odcinek o długości OP' po przeciwnej stronie punktu O niż punkt P'. Koniec tego odcinka jest szukanym punktem P.



Ryc. 7.11.

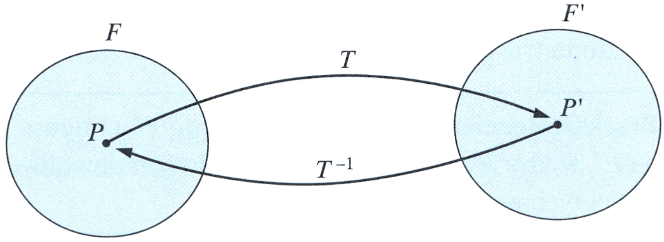
Podobne jest przekształcenie z 2. przykładu. Łącząc dowolny punkt P' okręgu z jego środkiem O, otrzymujemy w przecięciu odcinka OP' z brzegiem czworokąta $ABCD$ wpisanego w ten okrąg tylko jeden punkt P, którego obrazem w opisywanym przekształceniu jest punkt P'.

Przekształcenia podane w tych przykładach nazywamy odwracalnymi.

Przekształcenie T figury F na F' nazywamy **odwracalnym**, gdy każdy punkt P' figury F' jest obrazem tylko jednego punktu P figury F.

!

Przekształcenie odwrotne do przekształcenia T oznaczać będziemy przez T^{-1}. Jest zatem oczywiste, że $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$, to znaczy: przekształceniem odwrotnym do przekształcenia T^{-1} jest przekształcenie T (ryc. 7.12). Widzimy też, że dla dowolnego punktu P figury F zachodzi $\left(T^{-1}T\right)(P) = P$ oraz dla dowolnego punktu P'



Ryc. 7.12.

figury F' zachodzi $(TT^{-1})(P') = P'$. Stąd, a także z definicji iloczynu przekształceń wynika wniosek:

Wniosek. Iloczyn przekształcenia T i przekształcenia do niego odwrotnego T' jest przekształceniem tożsamościowym: $T^{-1}T = I_O$.

Podobnie $TT^{-1} = I_O$.

Pytania i zadania

1. Podaj znaczenie następujących pojęć:
   a) punkt stały przekształcenia,
   b) przekształcenie tożsamościowe,
   c) iloczyn przekształceń,
   d) przekształcenie odwracalne.
2. Czy składanie przekształceń jest przemienne czy łączne? Odpowiedź uzasadnij.
3. Dany jest punkt O na płaszczyźnie. Przekształcenie T płaszczyzny określamy następująco: obrazem punktu P płaszczyzny w tym przekształceniu jest taki punkt P', że $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'}$.
   a) Wyznacz obrazy kilku punktów płaszczyzny w tym przekształceniu.
   b) Czy przekształcenie to jest wzajemnie jednoznaczne? Odpowiedź uzasadnij.
4. Dany jest punkt A na płaszczyźnie. Zbadaj, czy przyporządkowanie dowolnemu punktowi P takiego punktu P', że $AP + AP' = 2$, jest przekształceniem.
5. Znajdź wszystkie punkty stałe przekształcenia, w którym obrazem punktu $P = (x; y)$ jest punkt:
   a) $P' = (x + 1; y + 2)$;
   b) $P' = (2x - 1; 3y - 2)$;
   c) $P' = (-x; y)$.
6. Znajdź iloczyn przekształceń T_1 i T_2, jeśli:
   a) $(x; y) \xrightarrow{T_1} (-x; y + 1)$, $(x; y) \xrightarrow{T_2} (2x; y)$;
   b) $(x; y) \xrightarrow{T_1} (x; -y)$, $(x; y) \xrightarrow{T_2} (-x; y)$;
   c) $(x; y) \xrightarrow{T_1} (y; x)$, $(x; y) \xrightarrow{T_2} (2x; y + 2)$.

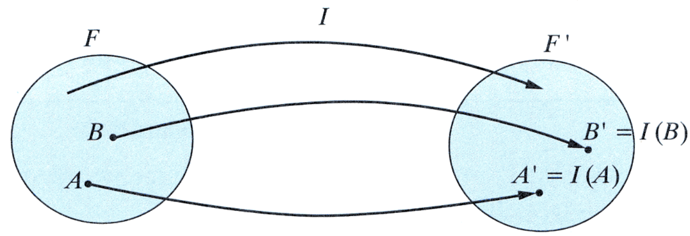
3. Przekształcenia izometryczne

Wśród przekształceń geometrycznych na szczególną uwagę zasługują te, które zachowują odległości punktów. Przekształcenia te nazywamy **izometrycznymi** lub **izometriami**. Słowo izometria pochodzi z greki: *isos* oznacza „równy", „jednakowy", zaś *metron* – „miara".

Przekształceniem izometrycznym figury F na figurę F' nazywamy takie przekształcenie F na F', w którym odległość obrazów dwóch dowolnych punktów figury F jest równa odległości tych punktów.

Przekształcenie izometryczne płaszczyzny na płaszczyznę nazywamy krótko **izometrią**. W dalszych rozważaniach izometrię oznaczać będziemy literą I.

Jeśli zatem I jest izometrią oraz $I(A)=A'$ i $I(B)=B'$, to $A'B'=AB$ (ryc. 7.13).



Ryc. 7.13.

Najprostszy przykład izometrii to przekształcenie tożsamościowe płaszczyzny, gdyż w przekształceniu tym każdy punkt jest swoim obrazem. Izometrię tę oznaczać będziemy przez I_0.

Ponadto zauważmy, że izometria jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym płaszczyzny na płaszczyznę; nie może się bowiem zdarzyć, aby pewne różne punkty miały w izometrii ten sam obraz (odległość obrazów tych punktów byłaby wtedy równa zeru!). Do każdej izometrii I istnieje więc przekształcenie odwrotne I^{-1}, które też jest izometrią.

Rzeczywiście, dla dowolnych punktów A i B (ryc. 7.14):

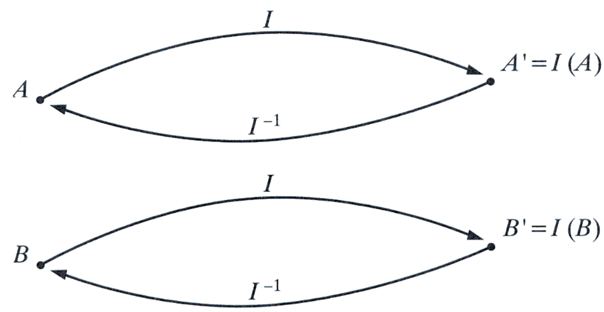
$$A'=I(A) \iff I^{-1}(A')=A$$

i

$$B'=I(B) \iff I^{-1}(B')=B,$$

oraz oczywiście:

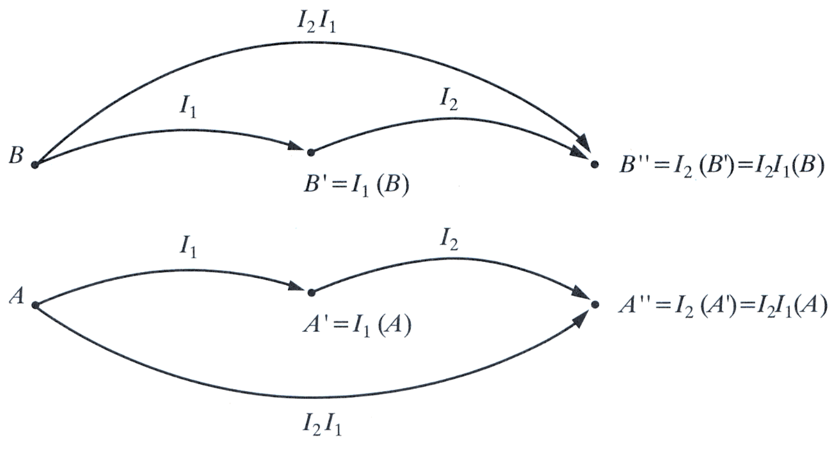
$$I^{-1}(A')I^{-1}(B')=A'B'.$$



Ryc. 7.14.

Nietrudno spostrzec, że przekształcenie złożone z izometrii jest także izometrią.

Istotnie, niech A i B będą dowolnymi punktami płaszczyzny, A' i B' – odpowiednio ich obrazami w izometrii I_1, zaś A'' i B'' – obrazami punktów A' i B' w izometrii I_2 (rys. 7.15):



Ryc. 7.15.

$A'' = I_2(A') = I_2(I_1(A)) = I_2I_1(A)$ oraz $B'' = I_2(B') = I_2(I_1(B)) = I_2I_1(B)$, przy tym $A''B'' = AB$, bo $A''B'' = A'B'$ i $A'B' = AB$.

Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Do każdej izometrii I istnieje przekształcenie odwrotne I^{-1}, które także jest izometrią. Złożenie izometrii jest izometrią.

Pytania i zadania

1. Co to jest izometria?
2. Czy izometria jest przekształceniem odwracalnym? Odpowiedź uzasadnij.
3. Czy złożenie izometrii jest izometrią? Odpowiedź uzasadnij.
4. Czy przekształcenie tożsamościowe płaszczyzny jest izometrią? Odpowiedź uzasadnij.
5. Na płaszczyźnie dane są półproste $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Dowolnemu punktowi P półprostej $\overrightarrow{OA}$ przyporządkowujemy punkt P' półprostej $\overrightarrow{OB}$ tak, że $OP = OP'$. Czy opisane przekształcenie półprostej $\overrightarrow{OA}$ na półprostą $\overrightarrow{OB}$ jest przekształceniem izometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.
6. Na płaszczyźnie dane są odcinki AB i CD o równych długościach. Każdemu punktowi P odcinka AB przyporządkowujemy taki punkt P' odcinka CD, że $P'D = PA$. Czy opisane przekształcenie odcinka AB na odcinek CD jest przekształceniem izometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.
7. Sprawdź, czy przekształcenie, które punktowi $P = (x; y)$ przyporządkowuje punkt P', jest izometrią, jeśli:
   a) $P' = (x - 1; y + 1)$; b) $P' = (-x; -y)$; c) $P' = (y; x + 1)$;
   d) $P' = (|x|; y)$; e) $P' = (x; 2)$.

8*. Podaj przykład przekształcenia nieizometrycznego prostej l na prostą l, w którym obrazy każdych dwóch punktów prostej l odległych o 1 są też odległe o 1.

4. Obrazy figur w izometrii

Omawiając przekształcenia geometryczne i podając ich przykłady, rozpatrywaliśmy obrazy niektórych figur w tych przekształceniach. Nie inaczej będzie i tym razem.

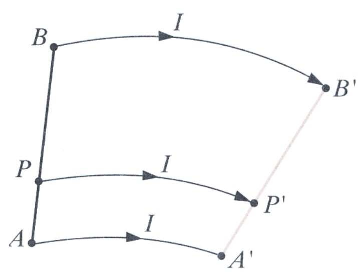
Zacznijmy od zbadania obrazu odcinka w dowolnej izometrii. Postawmy więc od razu następujący problem:

Problem. Dany jest odcinek $\overline{AB}$ i obrazy A' i B' jego końców A i B w pewnej izometrii I. Czy obrazem odcinka $\overline{AB}$ w tej izometrii jest odcinek $\overline{A'B'}$?

Rozwiązanie:

Mamy: $A' = I(A)$, $B' = I(B)$.

Niech P będzie dowolnym punktem odcinka $\overline{AB}$ (ryc. 7.16), czyli niech $P \in \overline{AB}$, zaś P' niech będzie obrazem punktu P w izometrii I, czyli $P' = I(P)$.



Ryc. 7.16.

Ponieważ:

$P \in \overline{AB} \iff AP + PB = AB$ (z definicji odcinka),

$\iff A'P' + P'B' = A'B'$ (bo I jest izometrią),

$\iff P' \in \overline{A'B'}$ (z definicji odcinka),

więc rzeczywiście $P \in \overline{AB} \iff P' \in \overline{A'B'}$, co oznacza, że obrazem każdego punktu odcinka $\overline{AB}$ jest punkt odcinka $\overline{A'B'}$ i każdy punkt odcinka $\overline{A'B'}$ jest obrazem pewnego punktu odcinka $\overline{AB}$.

Rozwiązując postawiony problem, wykazaliśmy coś więcej niż tylko to, że obrazem odcinka w dowolnej izometrii jest odcinek. Udowodniliśmy ponadto, że jeżeli jakiś punkt leży między dwoma innymi punktami na prostej, to jego obraz w dowolnej izometrii leży między obrazami tych dwóch punktów w obrazie tej prostej (ryc. 7.16). Stąd wynika także następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Obrazem prostej w dowolnej izometrii jest prosta.

Podobnie można udowodnić, że w dowolnej izometrii:
- obrazem półprostej jest półprosta;
- obrazem okręgu (koła) jest okrąg (koło) o promieniu tej samej długości;
- obrazem kąta – kąt, którego ramionami są obrazy ramion, a wnętrzem – obraz wnętrza kąta.

Ponadto każda izometria zachowuje kształt figur, ich wypukłość oraz uporządkowanie punktów na prostej.

Pytania i zadania

1. Udowodnij, że w dowolnej izometrii:
   a) obrazem środka odcinka jest środek jego obrazu;
   b) obrazem prostej jest prosta;
   c) obrazem okręgu (koła) jest okrąg (koło) o promieniu tej samej długości;
   d) obrazem figury wypukłej jest figura wypukła;
   e)* dwie proste przecinające się przekształcają się na dwie proste przecinające się, a dwie proste równoległe – na dwie proste równoległe;
   f)* obrazem trójkąta jest trójkąt o bokach odpowiednio tej samej długości.

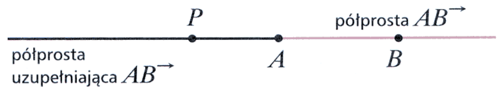
5. Punkty stałe izometrii

W przekształceniach geometrycznych mogą występować punkty stałe, czyli takie, które w tych przekształceniach są swoimi obrazami. Rozważając izometrie, będziemy rozstrzygać nie tylko to, czy mają one punkty stałe, ale także to, ile ich mają. W tym celu udowodnimy ważne twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeżeli izometria ma dwa punkty stałe, to każdy punkt prostej wyznaczonej przez te punkty jest punktem stałym tej izometrii.

□ Dowód. Niech dwa punkty A i B będą punktami stałymi izometrii. Wtedy obrazem prostej AB jest w tej izometrii ta sama prosta, gdyż izometria zachowuje współliniowość punktów i ich uporządkowanie na prostej. Obrazem półprostej $\overrightarrow{AB}$ jest w tej izometrii półprosta $\overrightarrow{AB}$, a półprostej uzupełniającej $\overrightarrow{AB}$ – ta sama półprosta uzupełniająca, zaś obrazem punktu P którejkolwiek z nich – punkt P' tej półprostej oddalony od A o AP, a więc ten sam punkt P (ryc. 7.17). □

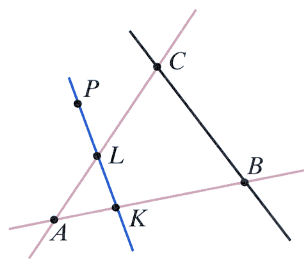


Ryc. 7.17.

Twierdzenie 2.

Jeżeli izometria ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, to każdy punkt płaszczyzny jest punktem stałym tej izometrii (jest ona przekształceniem tożsamościowym).

□ Dowód. Niech trzy niewspółliniowe punkty A, B, C będą punktami stałymi izometrii I. Wtedy (zgodnie z twierdzeniem 1.) każdy punkt każdej z prostych AB, BC i CA jest punktem stałym tej izometrii (ryc. 7.18).



Ryc. 7.18.

Niech P będzie dowolnym punktem nieleżącym na żadnej z tych prostych. Przez punkt P poprowadźmy prostą przecinającą proste AB i CA odpowiednio w różnych punktach K i L.

Ponieważ punkty K i L są stałe w izometrii I, więc każdy punkt prostej KL też jest punktem stałym tej izometrii. Wobec tego punkt P należący do prostej KL również jest punktem stałym izometrii I. □

Z udowodnionego twierdzenia wynika bardzo ważny wniosek:

Wniosek. Dwie izometrie zgodne w trzech niewspółliniowych punktach są zgodne w każdym punkcie (czyli są identycznymi przekształceniami).

□ Dowód. Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami, zaś I_1 i I_2 takimi izometriami, że:

$$I_1(A)=I_2(A),\quad I_1(B)=I_2(B),\quad I_1(C)=I_2(C).$$

Ponieważ I_1 i I_2 są izometriami, więc przekształcenie $I_2^{-1}I_1$ też jest izometrią, gdyż I_2^{-1} jest izometrią oraz złożenie izometrii jest izometrią.

Ponadto zachodzą równości:

$$I_2^{-1}I_1(A)=I_2^{-1}I_2(A)=A,$$
$$I_2^{-1}I_1(B)=I_2^{-1}I_2(B)=B,$$
$$I_2^{-1}I_1(C)=I_2^{-1}I_2(C)=C,$$

więc niewspółliniowe punkty A, B, C są punktami stałymi izometrii $I_2^{-1} I_1$. Zatem jest ona przekształceniem tożsamościowym, czyli $I_2^{-1} I_1 = I_0$, stąd wynikają równości:

$$I_2 = I_2 I_0 = I_2\left(I_2^{-1} I_1\right) = \left(I_2 I_2^{-1}\right) I_1 = I_0 I_1 = I_1$$

– i ostatecznie równość $I_1 = I_2$, która kończy dowód wniosku. □

Wniosek ten wyraża treść twierdzenia zwanego **twierdzeniem o doskonałej jednorodności płaszczyzny**.

Twierdzenie 3.

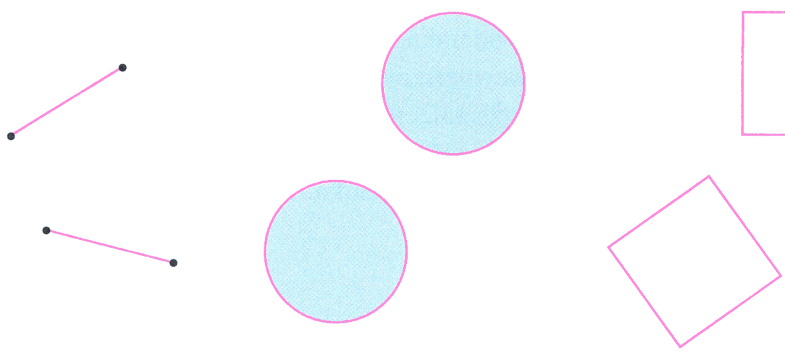
Jeżeli punkty A, B, C są niewspółliniowe, zaś A', B', C' – takie, że $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, to istnieje tylko jedna izometria, w której obrazami punktów A, B, C są odpowiednio punkty A', B', C'.

Jest ono, obok twierdzenia o strukturze izometrii (o którym będzie mowa nieco później), najważniejszym twierdzeniem o izometriach płaszczyzny. Pozwala bowiem w prosty sposób identyfikować dwa przekształcenia izometryczne, z pozoru różne. Wystarczy wybrać dowolne (a zatem najwygodniejsze dla weryfikującego je) trzy niewspółliniowe punkty i sprawdzić, czy oba przekształcenia są zgodne w tych punktach.

6. Przystawanie figur

Gdy patrzymy na pewne figury, zazwyczaj bez trudu potrafimy ocenić, czy są one przystające, czy też nie. Kierujemy się wówczas intuicją i za przystające uznajemy figury, które wydają się jednakowe i równe, na przykład: dwa odcinki o tej samej długości, dwa okręgi (koła) o równych promieniach, dwa kwadraty o boku tej samej długości (ryc. 7.19).

Geometryczne przystawanie figur opiera się na pojęciu izometrii.



Ryc. 7.19.

Dwie figury nazywamy **przystającymi**, gdy istnieje izometria przekształcająca jedną z tych figur na drugą.

Przystawanie figur F i G zapiszemy następująco: $F \equiv G$.

Z powyższej definicji i z własności izometrii wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Każda figura przystaje do siebie:

$$F \equiv F.$$

Rzeczywiście, izometrią przekształcającą figurę na siebie jest przekształcenie tożsamościowe.

Wniosek 2. Jeżeli figura F przystaje do figury G, to G przystaje do F.

Symbolicznie zapiszemy to tak:

$$F \equiv G \quad \Rightarrow \quad G \equiv F.$$

Istotnie, z przystawania figury F do figury G wynika istnienie izometrii I, w której figura F przekształca się na figurę G. Ale wówczas w przekształceniu odwrotnym I^{-1} do izometrii I (będącym także izometrią) obrazem figury G jest figura F. To zaś oznacza przystawanie figury G do figury F.

Wniosek 3. Jeżeli figura F przystaje do figury G i figura G przystaje do figury H, to F przystaje do H. Zapisujemy to następująco:

$$F \equiv G \wedge G \equiv H \quad \Rightarrow \quad F \equiv H.$$

Faktycznie, skoro $F \equiv G$ i $G \equiv H$, to istnieją izometrie I_1 i I_2 takie, że $G = I_1(F)$ i $H = I_2(G)$. Stąd $H = I_2(G) = I_2(I_1(F)) = I_2 I_1(F)$. A zatem istnieje izometria (jest nią $I_2 I_1$) przekształcająca figurę F na figurę H, co dowodzi przystawania F do H.

Jeśli wiemy, że dwa odcinki są przystające, możemy bez trudu wykazać, iż mają one równe długości (izometria zachowuje odległości punktów). Udowodnijmy teraz fakt odwrotny:

Jeżeli dwa odcinki mają równe długości, to są przystające.

Niech AB i CD będą odcinkami, które mają równe długości (ryc. 7.20).

Ryc. 7.20.

Rozważmy teraz przekształcenie T odcinka AB na odcinek CD, w którym punkty A i B odwzorowują się odpowiednio na punkty C i D, dowolny zaś punkt wewnętrzny M odcinka AB przekształca się na taki punkt N odcinka CD, że $AM = CN$ (ryc. 7.20).

Oczywiście punkt N jest punktem wewnętrznym odcinka CD, gdyż M jest punktem wewnętrznym odcinka AB. Ponadto w przekształceniu T każdemu punktowi wewnętrznemu N odcinka CD odpowiada punkt M taki, że $AM = CN$. Przekształcenie T jest więc odwracalne. Ponieważ dla dowolnych punktów M_1 i M_2 odcinka AB i ich obrazów N_1 i N_2 zachodzą równości:

$$M_1M_2 = AM_2 - AM_1 = CN_2 - CN_1 = N_1N_2,$$

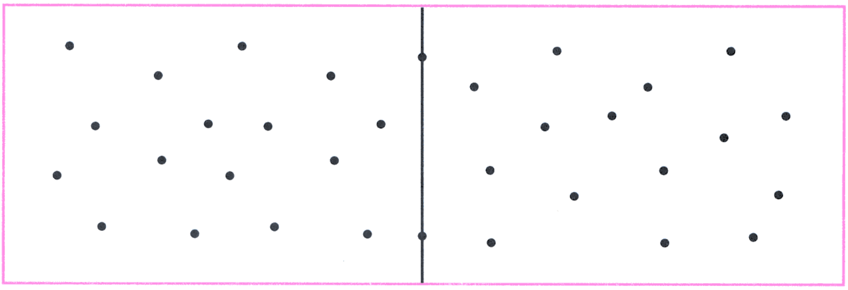
więc T jest przekształceniem izometrycznym. Skoro $T(\overline{AB}) = \overline{CD}$ i T jest izometrią, więc odcinki AB i CD są przystające.

Pytania i zadania

1. Jakie figury nazywamy w geometrii przystającymi?
2. Wymień przykłady figur przystających.
3. Podaj wnioski wynikające z definicji przystawania figur.

7. Symetria osiowa i jej własności

Wiemy już, że jeżeli izometria ma dwa punkty stałe, to każdy punkt prostej wyznaczonej przez nie jest punktem stałym tej izometrii. Zastanówmy się, czy istnieje taka izometria, która nie jest przekształceniem tożsamościowym płaszczyzny i ma co najmniej dwa punkty stałe. Jeżeli zaś istnieje, to ile jest takich izometrii?



Ryc. 7.21.

Istnienie takiego przekształcenia nietrudno zademonstrować. Wystarczy sobie wyobrazić składanie pokrytej punktami kartki papieru na pół. Pewne punkty tej kartki będą się wówczas nakładać, inne nie (ryc. 7.21). Te, które się nakładają, przyporządkowujemy sobie wzajemnie. Dlatego możliwość takiego przekształcenia geometrycznego płaszczyzny (uzyskanego na modelu składanej kartki) przyjmujemy jako pewnik:

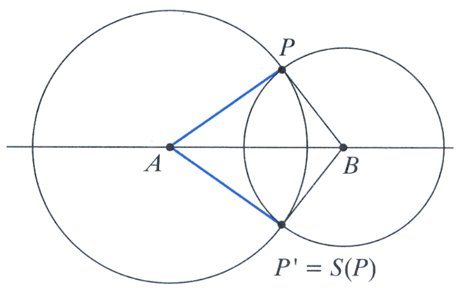
Mając dane dwa punkty płaszczyzny, możemy przekształcić ją na siebie izometrycznie i nietożsamościowo w taki sposób, że punkty te będą punktami stałymi tego przekształcenia.

Aby uzyskać odpowiedź na pytanie, ile jest takich przekształceń, prześledźmy konstrukcję obrazu punktu w przekształceniu izometrycznym i nietożsamościowym, które oznaczmy literą S. W tym celu rozwiążmy następujący problem:

Problem. Dane są takie dwa punkty A i B, że $S(A) = A$ i $S(B) = B$, oraz punkt P nieleżący na prostej AB. Skonstruuj punkt $P' = S(P)$.

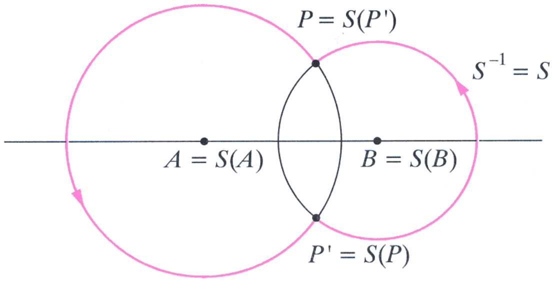
Rozwiązanie:

Ponieważ S jest izometrią, więc $P'A = PA$ i $P'B = PB$. Wobec tego $P' = S(P)$ jest punktem wspólnym okręgów o środkach A i B i o promieniach długości odpowiednio PA i PB (ryc. 7.22). Okręgi te przecinają się w dwóch punktach, gdyż $|AP - PB| < AB < AP + PB$ (punkty A, B i P nie są współliniowe). Punkty przecięcia się tych okręgów leżą, oczywiście, po różnych stronach prostej AB. Jednym z nich jest punkt P, więc punkt P' jest tym drugim. (P' nie może pokrywać się z P, gdyż S nie jest przekształceniem tożsamościowym).



Ryc. 7.22.

Opisana konstrukcja stanowi dowód, że nie może być dwóch różnych przekształceń izometrycznych i nietożsamościowych płaszczyzny o punktach stałych A i B. Wszystkie bowiem takie przekształcenia przyporządkują punktowi P ten sam punkt P' skonstruowany w powyższy sposób. Tę jedyną nietożsamościową izometrię mającą dwa punkty stałe A i B nazywamy symetrią względem prostej AB. Zauważmy też, że przekształceniem odwrotnym do tej symetrii jest ona sama (ryc. 7.23).



Ryc. 7.23.

Symetrią względem prostej a nazywamy takie przekształcenie izometryczne i nietożsamościowe płaszczyzny na siebie, w którym wszystkie punkty prostej a są stałe.

Prostą a nazywamy **osią** symetrii, zaś symetrię względem prostej określa się też mianem **symetrii osiowej**.

Symetrię osiową o osi a oznaczać będziemy symbolem S_a.

Rozwiązując postawiony problem, udowodniliśmy następujące twierdzenie:

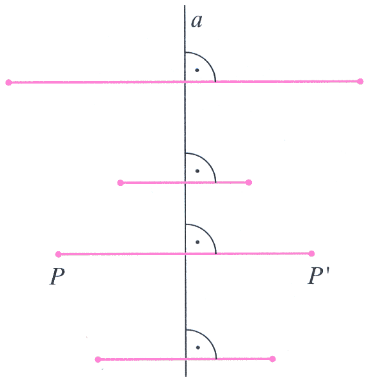
Twierdzenie

1. Jedyną nietożsamościową izometrią o dwóch punktach stałych A i B jest symetria względem prostej AB.
2. Symetria S_a przekształca wzajemnie jednoznacznie każdą z półpłaszczyzn o krawędzi a na uzupełniającą ją półpłaszczyznę.
3. Przekształceniem odwrotnym symetrii osiowej S_a jest ta sama symetria, to znaczy: $S_a^{-1} = S_a$.

Ponieważ symetria osiowa jest izometrią, więc ma wszystkie własności każdej izometrii. Punkt P', będący obrazem punktu P w symetrii względem prostej a, nazywamy **symetrycznym** do P **względem prostej** a, co zapisujemy: $P' = S_a(P)$.

Oczywiście $P' = S_a(P) \iff P = S_a(P')$.

Widzimy zatem, że punkty P i P', które są symetryczne względem prostej a, leżą na prostej prostopadłej do a, natomiast środek odcinka PP' leży na prostej a (ryc. 7.24).



Ryc. 7.24.

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij, co to jest symetria osiowa. Jakie ma ona własności?
2. Podaj konstrukcję obrazu punktu w symetrii osiowej.
3. Wykreśl obraz danego odcinka AB w symetrii względem danej prostej a.
4. Dany jest trójkąt ABC. Skonstruuj jego obraz w symetrii względem prostej a:
   a) przechodzącej przez jeden z wierzchołków i środek przeciwległego boku tego trójkąta,
   b) przechodzącej przez środki dwóch boków tego trójkąta.

5. Dane są punkty A, B, C. Punkty A i B są symetryczne względem pewnej prostej a. Skonstruuj obraz punktu C w symetrii S_a.
6. Wykaż, że przekształcenie, które punktowi $P=(x;y)$ przyporządkowuje punkt $P'=(-x;y)$, jest symetrią względem osi OY układu XOY.
7. Wykaż, że przekształcenie, które punktowi $P=(x;y)$ przyporządkowuje punkt $P'=(x;-y)$, jest symetrią względem osi OX układu XOY.
8. Dane są punkty P i P'. Wykreśl prostą a taką, aby $S_a(P)=P'$.
9. Wymień własności symetrii osiowej, które ma każda izometria.
10. Narysuj obraz okręgu w symetrii względem prostej:
    a) przechodzącej przez środek tego okręgu,
    b) nieprzechodzącej przez środek tego okręgu.

11*. Wykaż, że przekształcenie, które punktowi $P=(x;y)$ przyporządkowuje punkt $P'=(y;x)$, jest symetrią osiową. Wyznacz równanie osi tej symetrii.

12. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A=(-3;1)$, $B=(3;1)$, $C=(-1;4)$ i $D=(1;4)$. Wyznacz obraz tego czworokąta w symetrii z zadania 11.

13*. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Niech $A'=S_{BC}(A)$, $B'=S_{CA}(B)$, $C'=S_{AB}(C)$. Udowodnij, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest trzy razy większe od pola trójkąta ABC.

14. Dany jest trójkąt ABC i punkt P wewnątrz tego trójkąta. Niech $P_1=S_{BC}(P)$, $P_2=S_{CA}(P)$, $P_3=S_{AB}(P)$. Wykaż, że obwód sześciokąta $P_1BP_3AP_2C$ równy jest $2(PA+PB+PC)$.

15**. Na dwusiecznej kąta zewnętrznego C trójkąta ABC obrano punkt M różny od C. Udowodnij, że $MA+MB>CA+CB$.

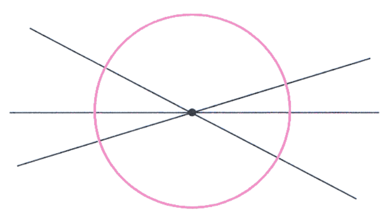
16**. Dana jest prosta l i punkty A i B po jej jednej stronie. Znajdź na prostej l taki punkt P, aby suma $AP+PB$ była najmniejsza.

8. Oś symetrii figury. Figury osiowo symetryczne

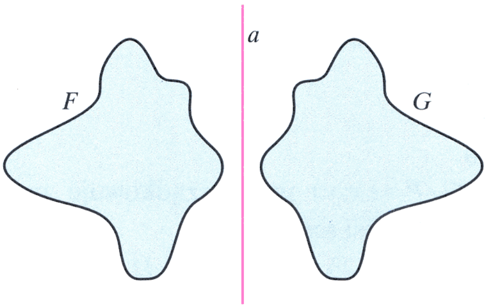
Wśród figur geometrycznych są takie, które w pewnej symetrii osiowej przekształcają się na siebie.

Figurę, która w **symetrii względem prostej *a*** przekształca się na siebie, nazywamy figurą **osiowo symetryczną**, a prostą a – jej **osią symetrii**.

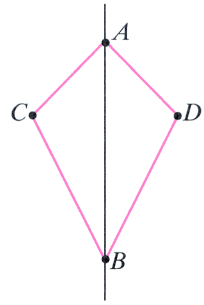
Na przykład:
- prosta jest figurą osiowo symetryczną; jej osią symetrii jest zarówno ta prosta, jak również każda prosta do niej prostopadła;
- odcinek jest figurą osiowo symetryczną (co jest jego osią symetrii?);
- okrąg (koło) jest figurą osiowo symetryczną – jego osią symetrii jest każda prosta przechodząca przez jego środek (ryc. 7.25);


Ryc. 7.25.

– figura będąca sumą mnogościową figur F i G symetrycznych względem danej prostej a (ryc. 7.26) jest figurą osiowo symetryczną – jej osią symetrii jest prosta a;
– trójkąty ABC i ABD, w których $AC=AD$ i $BC=BD$ (ryc. 7.27) są do siebie symetryczne względem prostej AB – prosta AB jest osią symetrii ich sumy mnogościowej, to jest czworokąta $ACBD$. Czworokąt, w którym dwie pary kolejnych boków mają równe długości, nazywa się **deltoidem**.



Ryc. 7.26.



Ryc. 7.27.

Pytania i zadania

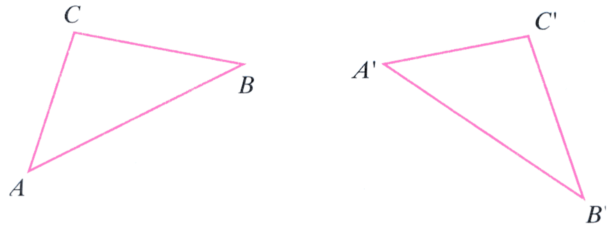
1. Wyjaśnij, jaką figurę nazywamy osiowo symetryczną.
2. Co to jest oś symetrii figury?
3. Podaj przykłady figur osiowo symetrycznych mających:
   a) jedną oś symetrii,
   b) dwie osie symetrii,
   c) trzy osie symetrii,
   d) cztery osie symetrii,
   e) nieskończenie wiele osi symetrii.
4. Wykaż, że jeżeli trójkąt ma jedną oś symetrii, to jest równoramienny.
5. Udowodnij, że jeżeli trójkąt ma dwie osie symetrii, to ma jeszcze jedną oś symetrii.

6*. Wykaż, że jeżeli czworokąt ma oś symetrii, to albo w czworokąt ten można wpisać okrąg, albo czworokąt ten można wpisać w okrąg.

7. Napisz równania osi symetrii kwadratu $ABCD$, gdzie $A=(-1;-1)$, $B=(1;-1)$, $C=(1;1)$, $D=(-1;1)$.
8. Napisz równania osi symetrii odcinka AB, jeśli $A=(3;0)$ i $B=(0;3)$.
9. Skonstruuj czworokąt $ABCD$, mając dane jego boki i wiedząc, że prosta AC jest osią symetrii kąta BAD.

9. Przystawanie trójkątów

Rozważmy trójkąt ABC i przekształćmy go w pewnej izometrii I. Niech obrazami punktów A, B, C w tej izometrii będą odpowiednio punkty A', B', C' (ryc. 7.28). Oczywiście są one także wierzchołkami pewnego trójkąta (dlaczego?), który jest przystający do trójkąta ABC (dlaczego?).



Ryc. 7.28.

Boki $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ trójkąta $A'B'C'$ są w izometrii I obrazami odpowiednio boków AB, BC i CA trójkąta ABC, więc:

$(*)$ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ i $CA = C'A'$,

$(**)$ $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ i $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$,

co wynika z własności każdej izometrii. Zatem jeśli dwa trójkąty są przystające, to ich odpowiednie boki są równe i odpowiednie kąty są równe.

Powstaje pytanie, czy aby stwierdzić, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, muszą zachodzić wszystkie równości $(*)$ i $(**)$, czy też wystarczą tylko niektóre z nich. Odpowiedź na to pytanie sformułujemy w postaci twierdzeń określających warunki dostateczne na to, aby dwa trójkąty były przystające. Warunki te nazywamy **cechami przystawania trójkątów**.

Pierwsza cecha przystawania trójkątów

Oznaczać ją będziemy krótko: BBB.

Twierdzenie 1.

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają po trzy boki odpowiednio równe.

☐ Dowód. Niech ABC i $A'B'C'$ będą takimi trójkątami, że:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$ i $CA = C'A'$.

Aby wykazać, że trójkąty te są przystające, co zapisujemy $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, znajdźmy izometrię I, która przekształca trójkąt ABC na trójkąt $A'B'C'$, a dokładniej – taką, aby:

$I(A) = A'$, $I(B) = B'$, $I(C) = C'$.

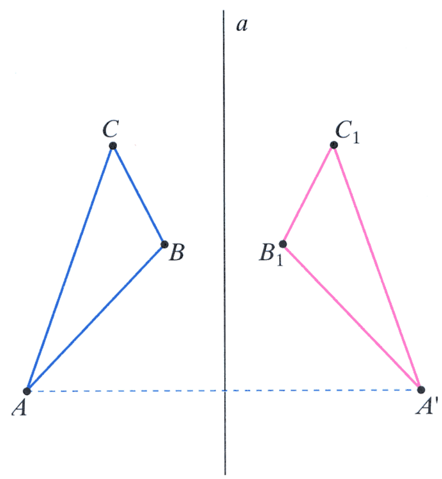
Zrobimy to w kilku krokach, składając symetrie osiowe. Wskażmy najpierw taką izometrię I, która punkt A przekształca na punkt A'.

Rozważmy symetrię osiową S_a, której osią a jest symetralna odcinka AA' (jeśli $A = A'$, wówczas za a należy obrać dowolną prostą przechodzącą przez A) (ryc. 7.29). Wtedy:

$S_a(A) = A'$, $S_a(B) = B_1$, $S_a(C) = C_1$.

Jeśli okazałoby się, że $B_1 = B'$ i $C_1 = C'$, wówczas nie tylko $S_a(A) = A'$, ale także $S_a(B) = B'$ i $S_a(C) = C'$ i za poszukiwaną izometrię I moglibyśmy przyjąć symetrię S_a:

$I = S_a$.



Ryc. 7.29.

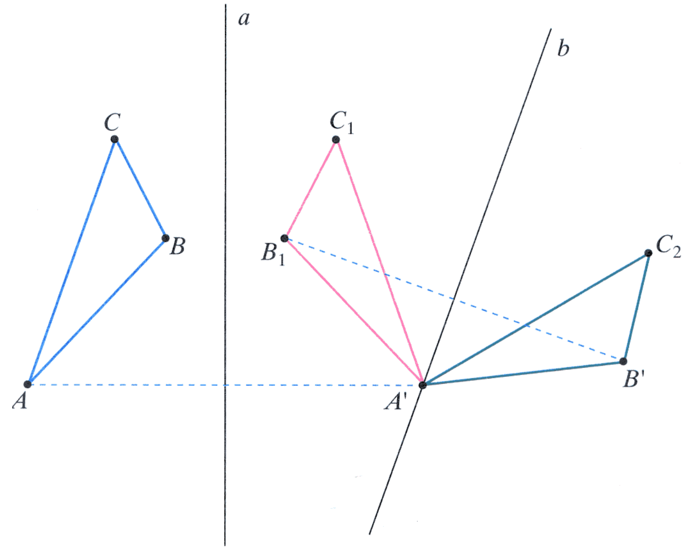
Niech więc $B_1 \neq B'$. Wówczas obieramy taką prostą b, aby w symetrii S_b punkt A' był stały, zaś B_1 przekształcił się na B'.

Wystarczy przyjąć za b (ryc. 7.30) symetralną odcinka B_1B'. Oczywiście b przechodzi przez A', bo $AB = A'B_1 = A'B'$; ponadto:

$$S_bS_a(A) = S_b(A') = A',$$

$$S_bS_a(B) = S_b(B_1) = B',$$

$$S_bS_a(C) = S_b(C_1) = C_2.$$

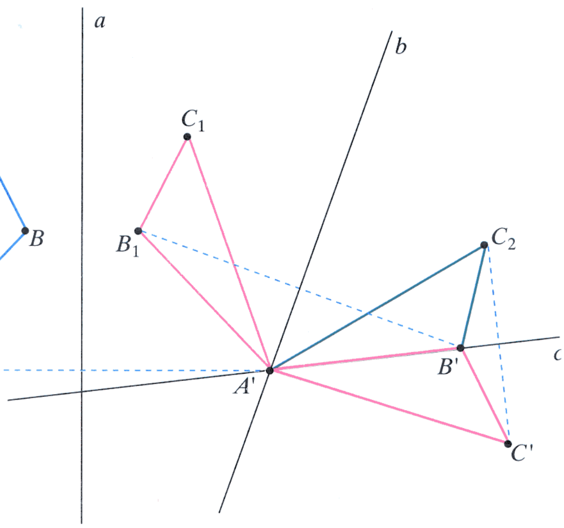


Ryc. 7.30.

Gdyby $C_2 = C'$, wtedy oprócz równości $S_bS_a(A) = A'$ i $S_bS_a(B) = B'$ mielibyśmy także równość $S_bS_a(C) = C'$ i poszukiwaną izometrią I byłaby S_bS_a:

$$I = S_bS_a.$$

Niech zatem $C_2 \neq C'$. Wówczas obieramy taką prostą c, aby w symetrii S_c punkty A' i B' były stałe, zaś punkt C_2 przekształcił się na punkt C'. Jeśli przyjmiemy za c symetralną odcinka C_2C' (ryc. 7.31), wtedy $S_c(A') = A'$ i $S_c(B') = B'$, bo c przechodzi przez punkty A' i B', co wynika z równości $A'C_2 = A'C'$ i $B'C_2 = B'C'$, a ponadto oczywiście $S_c(C_2) = C'$. Ostatecznie otrzymamy równości:



Ryc. 7.31.

$$S_cS_bS_a(A) = S_cS_b(A') = S_c(A') = A',$$

$$S_cS_bS_a(B) = S_cS_b(B_1) = S_c(B') = B',$$

$$S_cS_bS_a(C) = S_cS_b(C_1) = S_c(C_2') = C',$$

z których wynika, że szukaną izometrią I jest $S_cS_bS_a$:

$$I = S_cS_bS_a.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. $\square$

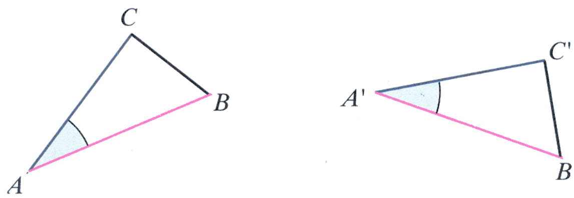
Druga cecha przystawania trójkątów

Oznaczać ją będziemy krótko: BKB.

Twierdzenie 2.

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie między nimi zawartym także równym.

To znaczy, że jeśli $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (ryc. 7.32), to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.



Ryc. 7.32.

Trzecia cecha przystawania trójkątów

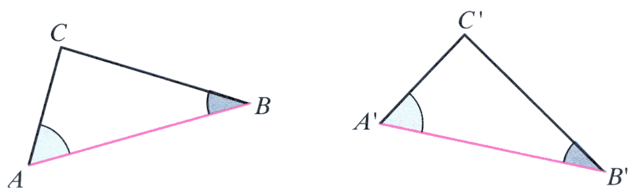
Oznaczać ją będziemy krótko: KBK.

Twierdzenie 3.

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają po jednym boku równym i po dwa kąty do niego przylegające odpowiednio równe.

Jeśli $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ (ryc. 7.33), to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.

Dowody twierdzeń 2. i 3. przeprowadź samodzielnie.



Ryc. 7.33.

Pytania i zadania

1. Kiedy dwa trójkąty są przystające?
2. Odłóż dany kąt wypukły, różny od kąta półpełnego, przy danej półprostej l od jej początku O, po jednej stronie prostej zawierającej półprostą l.
3. Udowodnij cechy przystawania trójkątów:
   a) BKB; b) KBK.
4. Kiedy dwa trójkąty równoboczne są przystające?
5. Udowodnij, że dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeśli zachodzi jeden z poniższych warunków:
   a) ich przyprostokątne są odpowiednio równe;
   b) przyprostokątna i kąt ostry do niej przyległy jednego trójkąta są równe przyprostokątnej i kątowi do niej przyległemu drugiego trójkąta;
   c) mają odpowiednio równe: przeciwprostokątną i jedną przyprostokątną;
   d) mają odpowiednio równe: przeciwprostokątną i kąt do niej przylegający;
   e) mają odpowiednio równe: przyprostokątną i kąt przeciwległy.

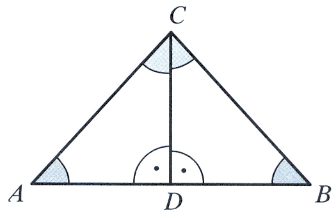
6. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC obieramy odpowiednio takie punkty D, E i F, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.
7. Na przedłużeniach podstawy BC trójkąta równoramiennego ABC obieramy takie punkty D i E, że $BD = CE$. Udowodnij, że trójkąt DEA jest równoramienny.
8. Na jednej z dwóch prostych przecinających się w punkcie O odkładamy od punktu O po obu jego stronach równe odcinki OA i OB, a na drugiej prostej równe odcinki OC i OD. Wykaż, że trójkąty OBD i OAC są przystające.
9. Udowodnij, że jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ są równe: boki AB i $A'B'$, kąty A i A' oraz dwusieczne tych kątów, to trójkąty te są przystające.
10. Wykaż, że jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ są równe boki AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ oraz środkowe AD i $A'D'$, to trójkąty te są przystające.
11. W trójkątach ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Czy stąd wynika, że trójkąty te są przystające?
12*. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

10. Zastosowanie cech przystawania trójkątów do dowodzenia twierdzeń

Przyjrzyjmy się teraz, jak cechy przystawania trójkątów można zastosować w dowodzeniu znanych nam już twierdzeń.

Przykład 1. Wykaż, że jeżeli w trójkącie dwa kąty są równe, to trójkąt ten jest równoramienny.
Rozwiązanie:

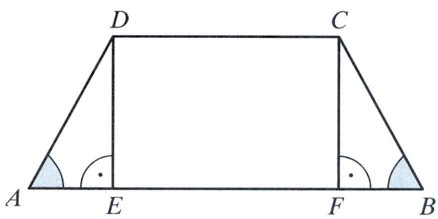
Rozważmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Opuśćmy wysokość CD tego trójkąta (ryc. 7.34). Teraz widzimy, że $\Delta ADC \equiv \Delta DBC$, na mocy cechy KBK. Z przystawania tych trójkątów wynika równość boków AC i BC, która kończy dowód równoramienności trójkąta ABC.



Ryc. 7.34.

Przykład 2. Udowodnij, że jeżeli w trapezie kąty przy jednej z podstaw są równe, to trapez ten jest równoramienny.
Rozwiązanie:

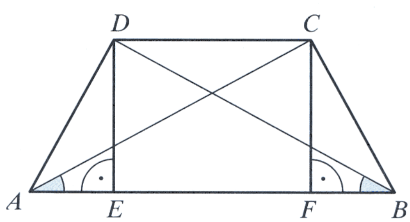
Niech $ABCD$ będzie trapezem, w którym $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Poprowadźmy wysokości DE i CF tego trapezu (ryc. 7.35). Wówczas zauważymy, że trójkąty prostokątne AED i FBC są przystające (cecha KBK). Stąd wynika równość boków AD i BC tego trapezu. Jest on zatem równoramienny.



Ryc. 7.35.

Przykład 3. Udowodnij, że jeżeli trapez ma przekątne równej długości, to jest równoramienny.
Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie trapezem, którego przekątne AC i BD są równej długości (ryc. 7.36). Poprowadźmy wysokości DE i CF tego trapezu.



Ryc. 7.36.

Wówczas z przystawania trójkątów prostokątnych AFC i BED otrzymamy równość odpowiednio ich kątów FAC i EBD. Ale kąty te są jednocześnie kątami odpowiednio trójkątów ABC i ABD. Z przystawania tych trójkątów – cecha BKB – wynika równość ich boków BC i AD, która dowodzi równoramienności tego trapezu.

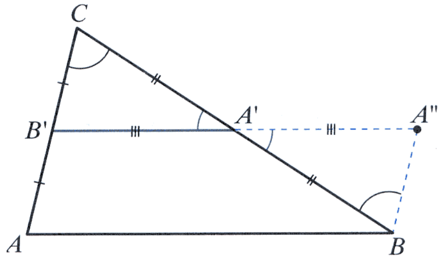
Przykład 4. Wykaż, że w trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego i równy jego połowie.

Rozwiązanie:

Rozważmy trójkąt ABC i oznaczmy środki jego boków BC i CA odpowiednio przez A' i B'. Przedłużmy odcinek $B'A'$ poza punkt A' do takiego punktu A'', aby $B'A' = A'A''$ (ryc. 7.37). Z przystawania trójkątów $BA'A''$ i $B'A'C$ – cecha BKB – wynikają:

– równość kątów $A'BA''$ i $A'CB'$ (a z niej równoległość odcinków BA'' i $B'C$),

– równość odcinków BA'' i $B'C$.



Ryc. 7.37.

Mamy zatem równości:

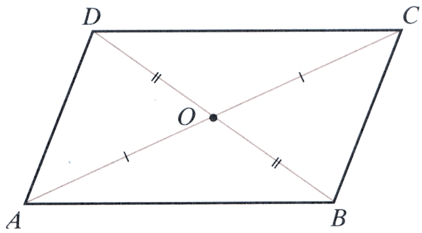
$BA'' = B'C$ i $AB' = B'C$,

z których wynika równość odcinków AB' i BA''. Czworokąt $ABA''B'$ ma więc przeciwległe boki AB' i BA'' równej długości i równoległe. Jest on równoległobokiem. Zatem jego boki AB i $B'A''$ są równej długości i równoległe. Stąd wynika równoległość odcinków AB i $B'A'$ oraz równość $B'A' = \frac{1}{2}AB$.

Przykład 5. Udowodnij, że czworokąt wypukły, którego przekątne mają wspólny środek, jest równoległobokiem.

Rozwiązanie:

Oznaczmy wspólny środek przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ przez O (ryc. 7.38). Zauważmy, że $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ i $\Delta BOC \equiv \Delta AOD$ – cecha BKB – skąd wynika równość kątów BAC i ACD, która dowodzi równoległości boków AB i CD, oraz równość kątów ACB i CAD, która dowodzi równoległości boków BC i AD. Czworokąt $ABCD$ jest więc równoległobokiem.



Ryc. 7.38.

Pytania i zadania

1. Udowodnij, że w każdym trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.
2. Wykaż, że w trapezie równoramiennym:

   a) kąty przy każdej podstawie są równe,

   b) przekątne są równej długości.
3. Dowiedź, że równoległobok, którego przekątne są prostopadłe, jest rombem.
4. Wykaż, że jeżeli trójkąt ma dwie środkowe równej długości, to jest równoramienny.
5. Udowodnij, że jeżeli trójkąt ma dwie wysokości równe, to jest równoramienny.

6. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie dwa boki są różnej długości, to naprzeciw dłuższego z nich leży większy kąt.
7. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie dwa kąty nie są równe, to naprzeciw większego z nich leży dłuższy bok.
8. Z punktu P poprowadzono do danego okręgu dwie styczne. Udowodnij, że odcinki tych stycznych, od punktu P do punktów styczności, są równej długości.

9*. Na płaszczyźnie dane są trzy przystające okręgi, przecinające się parami i mające jeden punkt wspólny P. Udowodnij, że okrąg przechodzący przez punkty wspólne tych okręgów, różne od P, jest przystający do tych okręgów.

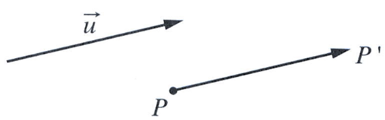
11. Przesunięcie równoległe

Niech dany będzie na płaszczyźnie wektor $\vec{u}$.

Przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, w którym obrazem dowolnego punktu P jest taki punkt P', że $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$, nazywamy **przesunięciem równoległym** lub **translacją** płaszczyzny **o wektor** $\vec{u}$.

Translację płaszczyzny o wektor $\vec{u}$ (ryc. 7.39) oznaczać będziemy symbolem $T_{\vec{u}}$. Tak więc:

$$P' = T_{\vec{u}}(P) \iff \overrightarrow{PP'} = \vec{u}.$$



Ryc. 7.39.

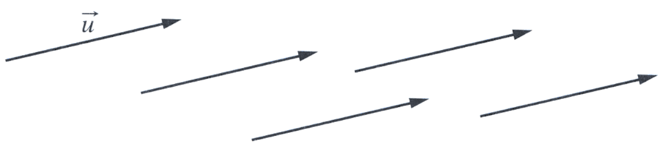
Gdy wektor $\vec{u} = \vec{0}$, punkt P' pokrywa się z punktem P; translacja jest wtedy przekształceniem tożsamościowym. Rzeczywiście, dla każdego punktu P z określenia translacji wynika:

$$P = T_{\vec{u}}(P) \iff \overrightarrow{PP} = \vec{u} \iff \vec{u} = \vec{0}, \text{ gdyż } \overrightarrow{PP} = \vec{0}.$$

Z definicji translacji wynika również, że każdym dwóm różnym punktom P i Q przyporządkowuje ona różne punkty P' i Q'. Do translacji $T_{\vec{u}}$ istnieje więc przekształcenie odwrotne $(T_{\vec{u}})^{-1}$, które jest translacją o wektor $-\vec{u}$ (przeciwny do $\vec{u}$).

Zatem: $(T_{\vec{u}})^{-1} = T_{-\vec{u}}$.

Wszystkim wektorom równym danemu wektorowi $\vec{u}$ (ryc. 7.40)



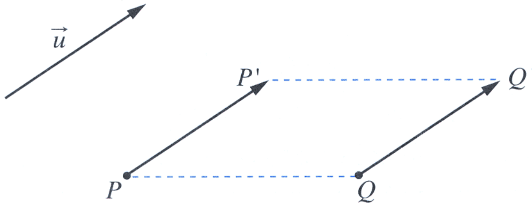
Ryc. 7.40.

odpowiada jedno i to samo przesunięcie równoległe $T_{\vec{u}}$. Wektorowi swobodnemu odpowiada więc przesunięcie równoległe i na odwrót: każde przesunięcie równoległe odpowiada tylko jednemu wektorowi swobodnemu.

Twierdzenie 1.

Translacja płaszczyzny jest izometrią.

▢ Dowód. Weźmy dowolne dwa punkty P i Q i rozważmy ich obrazy P' i Q' w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ (ryc. 7.41).



Ryc. 7.41.

Należy wykazać, że $P'Q' = PQ$. Ponieważ: $P' = T_{\vec{u}}(P)$ i $Q' = T_{\vec{u}}(Q)$, więc $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{QQ'} = \vec{u}$, czyli $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$.

Równość ta oznacza równość długości odcinków PP' i QQ' i ich równoległość. Ponadto są one przeciwległymi bokami czworokąta $PQQ'P'$, więc czworokąt ten jest równoległobokiem. Zatem jego przeciwległe boki PQ i $P'Q'$ są równej długości, co kończy dowód. ▢

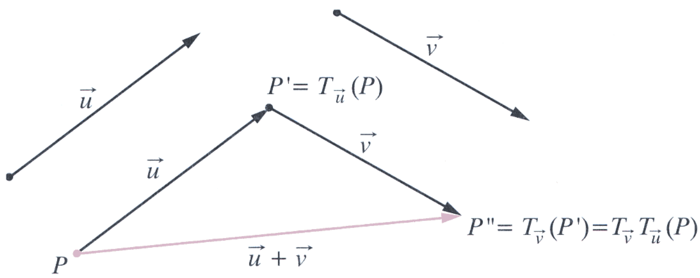
Z powyższego twierdzenia wynika, że translacja płaszczyzny ma wszystkie własności izometrii (przypomnij je!).

Twierdzenie 2.

Złożenie translacji o wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest translacją o wektor $\vec{u} + \vec{v}$, co zapisujemy:

$$T_{\vec{v}}T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}.$$

▢ Dowód. Twierdzenie to wynika bezpośrednio z określenia sumy wektorów. Niech punkty P' i P'' będą obrazami dowolnego punktu P odpowiednio w translacjach $T_{\vec{u}}$ i $T_{\vec{v}}$ (ryc. 7.42).



Ryc. 7.42.

Wobec tego z jednej strony mamy:

$P' = T_{\vec{u}}(P)$ i $P'' = T_{\vec{v}}(P')$, czyli $P'' = T_{\vec{v}}T_{\vec{u}}(P)$.

Z drugiej zaś: $P'' = T_{\vec{u}+\vec{v}}(P)$, gdyż $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \vec{u} + \vec{v}$.

Z dowolności wyboru punktu P wynika równość przekształceń $T_{\vec{v}}T_{\vec{u}}$ i $T_{\vec{u}}T_{\vec{v}}$. ▢

Ponieważ dodawanie wektorów jest przemienne i łączne, więc składanie translacji jest również przemienne i łączne.

Wniosek. Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zachodzą równości:

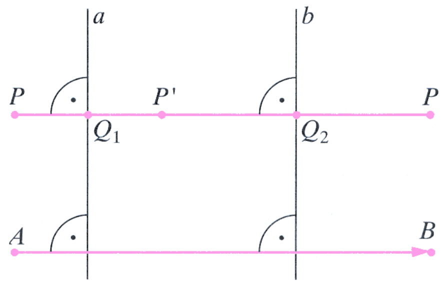
a) $T_{\vec{v}}T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}}T_{\vec{v}}$,

b) $T_{\vec{w}}(T_{\vec{v}}T_{\vec{u}}) = (T_{\vec{w}}T_{\vec{v}})T_{\vec{u}}$.

Kolejne twierdzenie ustala związek między symetrią osiową i przesunięciem równoległym płaszczyzny.

Twierdzenie 3.

Translacja o wektor $\overrightarrow{AB}$ jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach a i b prostopadłych do prostej AB i takich, że odległość obu osi jest równa $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

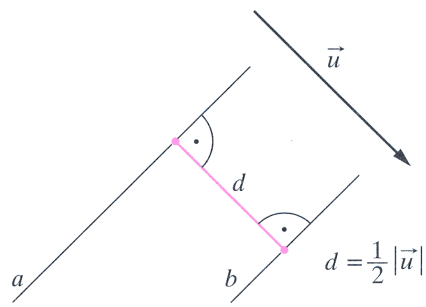


Ryc. 7.43.

□ Dowód*. Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny, P' – jego obrazem w symetrii S_a, P'' – obrazem punktu P' w symetrii S_b oraz Q_1 i Q_2 niech będą punktami przecięcia prostej PP'' z prostymi a i b (ryc. 7.43).

Wykażemy, że $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{AB}$. Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = (\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1P'}) + (\overrightarrow{P'Q_2} + \overrightarrow{Q_2P''})$ oraz z własności symetrii $\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1P'} = 2\overrightarrow{Q_1P'}$ i $\overrightarrow{P'Q_2} + \overrightarrow{Q_2P''} = 2\overrightarrow{P'Q_2}$, więc $\overrightarrow{PP''} = 2(\overrightarrow{Q_1P'} + \overrightarrow{P'Q_2}) = 2\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Stąd, i z założenia, że $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, wynika $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{AB}$, co oznacza, że $P'' = T_{\overrightarrow{AB}}(P)$. Z drugiej strony: $P'' = S_b(P') = S_bS_a(P)$, więc wobec dowolności wyboru punktu P przekształcenia $T_{\overrightarrow{AB}}$ i S_bS_a są równe. □

Wniosek. Złożenie dwóch symetrii osiowych o dowolnych osiach równoległych a i b jest translacją o wektor prostopadły do a i b, o zwrocie od a do b i długości równej podwojonej odległości prostych a i b (ryc. 7.44).



Ryc. 7.44.

Wzory określające translację

Niech na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych XOY wektor $\vec{u}$ ma współrzędne a, b, punkt P ma współrzędne x, y, a jego obraz P' w translacji o wektor $\vec{u}$ niech ma współrzędne x', y', czyli $\vec{u} = [a; b]$, $P = (x; y)$, $P' = (x'; y')$ (ryc. 7.45). Wówczas:

$$P' = T_{\vec{u}}(P) \iff \overrightarrow{PP'} = \vec{u} \iff [x' - x; y' - y] = [a; b] \iff$$

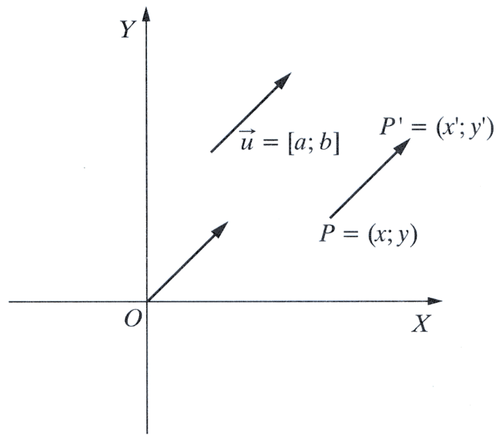
$$\iff x' - x = a \ \wedge \ y' - y = b \iff x' = x + a \ \wedge \ y' = y + b.$$

Zatem:
$T_{[a;\,b]}((x;y)) = (x+a;\,y+b)$, co oznacza, że: współrzędne obrazu P' punktu P w translacji płaszczyzny o wektor $\vec{u}$ otrzymujemy przez dodanie do współrzędnych punktu P odpowiednich współrzędnych wektora przesunięcia $\vec{u}$. Tak więc wzory:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

określają translację płaszczyzny o wektor $\vec{u} = [a;b]$. Wyznaczając z nich x i y, otrzymujemy wzory:

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$



Ryc. 7.45.

na przekształcenie odwrotne do translacji o wektor $\vec{u} = [a;b]$. Przekształcenie to również jest translacją; jej wektorem jest wektor $[-a;-b] = -[a;b] = -\vec{u}$ (przeciwny do wektora $\vec{u}$):

$$\left(T_{[a;\,b]}\right)^{-1} = T_{[-a;\,-b]}.$$

Posługując się wzorami na translację, można dowieść, że:
a) translacja jest izometrią,
b) złożenie translacji o wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest translacją o wektor $\vec{u} + \vec{v}$,
c) translacja o wektor zerowy jest przekształceniem tożsamościowym.

Udowodnienie powyższych punktów nie powinno sprawić trudności. Przeprowadź je samodzielnie.

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij, jakie przekształcenie płaszczyzny nazywamy translacją.
2. Podaj własności translacji.
3. Jaki związek zachodzi między symetrią osiową i przesunięciem równoległym płaszczyzny?
4. Podaj wzory określające translację.
5. Dane są punkty A, B, C. Wykreśl obrazy punktów A, B, C w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AB}$.
6. Narysuj obrazy danych figur w translacji o wektor $\vec{u}$:
   a) trójkąta ABC, gdy $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$;
   b) równoległoboku $ABCD$, gdy $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
   c) kwadratu $ABCD$, gdy $\vec{u} = 2\overrightarrow{BD}$;
   d) trapezu $ABCD$, gdy $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.
7. Dany jest czworokąt $ABCD$. Narysuj obraz tego czworokąta w przesunięciu o wektor:
   a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AC}$; c) $2\overrightarrow{BC}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
8. Napisz wzór na translację o wektor $\vec{u}$, gdy:
   a) $\vec{u} = [1;2]$; b) $\vec{u} = [-1;2]$; c) $\vec{u} = [0;-3]$.

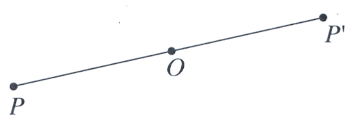
9. Znajdź obrazy punktów: $(1;2)$, $(-2;1)$, $(-3;0)$, $(-5;-2)$ w przesunięciu o wektor $\vec{u}=[2;-2]$.
10. Dane są punkty $A=(2;3)$, $B=(-1;4)$, $C=(0;-2)$. Napisz wzór opisujący translację o wektor:
    a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{CB}$; e) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
11. Znajdź wzór na przekształcenie $T_{\vec{v}}T_{\vec{u}}$, gdy $\vec{u}=[1;-2]$, $\vec{v}=[-2;3]$.
12. Znajdź równanie obrazu prostej o równaniu $y=-2x+1$ w translacji o wektor $\vec{u}=[2;-1]$.
13. Znajdź równanie obrazu okręgu o równaniu $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ w translacji o wektor $\vec{u}=[-2;2]$.
14. Znajdź równanie obrazu paraboli o równaniu $y=x^2$ w translacji o wektor $\vec{u}=[2;-1]$.
15. Dane są punkty $A=(5;-1)$, $B=(3;3)$, $C=(-1;0)$. Znajdź translację, w której:
    a) obrazem punktu A jest punkt $A'=(2;3)$;
    b) obrazem środka S odcinka BC jest punkt $S'=(-1;-2)$.
16. Wykaż, że obrazem prostej w translacji jest prosta do niej równoległa.
17. Mniejszą podstawą trapezu $ABCD$ jest bok AB. Podstawa CD jest dwa razy dłuższa od AB i ma środek $M=(1;1)$. Wiedząc, że $A=(3;2)$, $B=(2;-1)$, znajdź pozostałe wierzchołki tego trapezu.
18. Dwa okręgi o promieniu R są styczne w punkcie K. Na jednym z nich obrano punkt A, a na drugim – punkt B w taki sposób, że $\sphericalangle AKB=90^\circ$. Udowodnij, że $AB=2R$.
19. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ obrano pewien punkt M. Udowodnij, że istnieje czworokąt mający prostopadłe przekątne o długościach odpowiednio AB i BC i o bokach długości AM, BM, CM i DM.

20*. Punkty M i N są środkami podstaw AB i CD trapezu $ABCD$. Udowodnij, że jeżeli $2MN=|AB-CD|$, to $\sphericalangle BAD+\sphericalangle ABC=90^\circ$.

21**. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ obrano taki punkt M, że czworokąt $ABMD$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle CBM=\sphericalangle CDM$, to $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCM$.

12. Symetria środkowa i jej własności

Obierzmy na płaszczyźnie punkt O. Każdemu punktowi P płaszczyzny, różnemu od O, przyporządkujmy taki punkt P', że O jest środkiem odcinka PP', zaś punktowi O przyporządkujmy ten sam punkt (ryc. 7.46). Określone w ten sposób przekształcenie płaszczyzny na siebie nazywamy symetrią środkową (lub odbiciem) względem punktu O. Inaczej mówiąc:



Ryc. 7.46.

Symetrią środkową względem punktu *O* nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny na siebie, w którym obrazem dowolnego punktu P płaszczyzny jest taki punkt P', że:

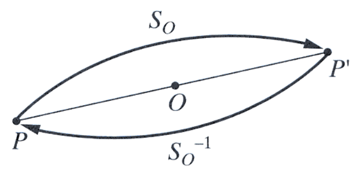
$$\overrightarrow{OP'}=-\overrightarrow{OP}.$$

Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**. Symetrię o środku O oznaczać będziemy przez S_O. Tak więc:

$$P' = S_O(P) \iff \overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}.$$

Ponieważ $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} \iff \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$, więc $P' = S_O(P) \iff P = S_O(P')$ (ryc. 7.47). Zatem przekształcenie S_O jest odwracalne, a przekształceniem odwrotnym do S_O jest ono samo:

$$S_O^{-1} = S_O.$$



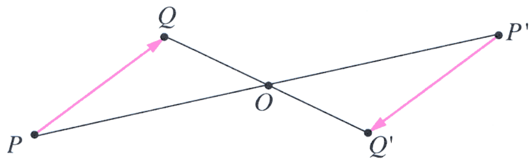
Ryc. 7.47.

Twierdzenie 1.

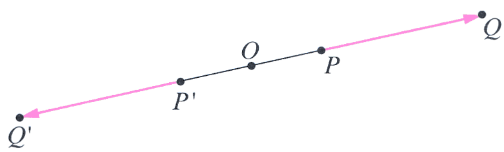
Symetria S_O jest izometrią.

▢ Dowód. Niech P i Q będą dwoma dowolnymi punktami, zaś P' i Q' odpowiednio ich obrazami w symetrii S_O.

Należy rozpatrzyć dwa przypadki: gdy punkty P, Q i O nie są współliniowe (ryc. 7.48) i przypadek, gdy punkty P, Q i O są współliniowe (ryc. 7.49).



Ryc. 7.48.



Ryc. 7.49.

Mamy więc:

$P' = S_O(P)$ i $Q' = S_O(Q)$, skąd $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ'} = -\overrightarrow{OQ}$.

Wobec tego:

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}, \quad \text{czyli} \quad \overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ}.$$

Stąd wynika, że odcinki $P'Q'$ i PQ są równej długości, co kończy dowód tezy. ▢

Ponieważ symetria środkowa jest izometrią, więc ma też wszystkie własności izometrii. Na przykład obrazem odcinka, półprostej, prostej, kąta, wielokąta, okręgu (koła) jest w symetrii środkowej odpowiednio odcinek, półprosta, prosta, kąt, wielokąt, okrąg (koło), a obrazy tych figur są figurami przystającymi do danych figur.

Przeprowadzony dowód pozwala wysnuć jeszcze takie oto wnioski:

Wniosek 1. Wektor i jego obraz mają przeciwne zwroty.

Wniosek 2. Półprosta i jej obraz mają przeciwne zwroty.

Wniosek 3. Obrazem prostej przechodzącej przez środek symetrii jest ta sama prosta, a prostej nieprzechodzącej przez środek symetrii – prosta równoległa do niej (ryc. 7.50).

Ryc. 7.50.

Wniosek 4. Prosta nieprzechodząca przez środek symetrii i jej obraz są równo odległe od środka symetrii.

Kolejne twierdzenie ustala związek między symetrią osiową i symetrią środkową.

Twierdzenie 2.

Symetria środkowa S_O jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o dowolnych osiach prostopadłych i przecinających się w środku O tej symetrii.

▢ Dowód*. Przez środek O symetrii S_O poprowadźmy dowolne dwie proste prostopadłe a, b.

Wybierzmy na płaszczyźnie jakikolwiek punkt P; niech jego obrazem w symetrii S_a będzie punkt P', a obrazem punktu P' w symetrii S_b niech będzie punkt P''. Oczywiście punkt P może zajmować jedno z następujących położeń względem prostych a i b:

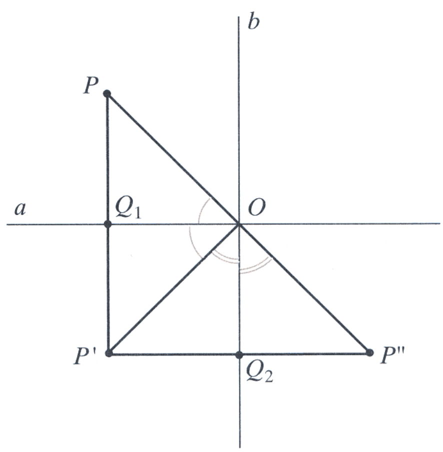
1. Punkt P nie leży na żadnej z prostych a i b (ryc. 7.51). Mamy:

   $P' = S_a(P)$ i $P'' = S_b(P')$, więc:

   $(*)\ P'' = S_b S_a(P)$.

   Z własności symetrii wynika, że:
   $\sphericalangle POQ_1 = \sphericalangle Q_1OP'$ i $\sphericalangle P'OQ_2 = \sphericalangle Q_2OP''$ oraz:
   $OP = OP' = OP''$, więc $OP = OP''$.
   Ponadto, ponieważ $\sphericalangle Q_1OP' + \sphericalangle P'OQ_2 = 90°$,
   więc $\sphericalangle POP'' = \sphericalangle POP' + \sphericalangle P'OP'' =$
   $= 2\sphericalangle Q_1OP' + 2\sphericalangle P'OQ_2 =$
   $= 2(\sphericalangle Q_1OP' + \sphericalangle P'OQ_2) = 2 \cdot 90° = 180°$.
   Zatem punkty P, O i P'' leżą na jednej prostej. Wobec tego, a także z równości $PO = OP''$ wnioskujemy, że $\overrightarrow{OP''} = -\overrightarrow{OP}$, co dowodzi, że:

   $(**)\ P'' = S_O(P)$.

   Ryc. 7.51.

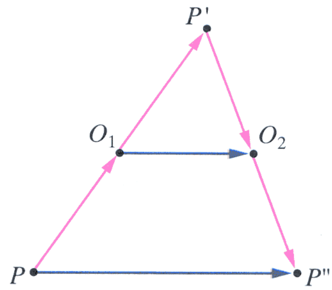
   Z dowolności wyboru punktu P i na mocy równości $(*)$ i $(**)$ wynika, że $S_b S_a = S_O$. ▢
2. Punkt P należy do którejś z prostych a i b. Ten przypadek przeanalizuj samodzielnie.

Między symetrią środkową i translacją płaszczyzny zachodzi jeszcze jeden związek:

Twierdzenie 3.

Złożenie symetrii środkowych S_{O_1} i S_{O_2} o środkach O_1 i O_2 jest translacją płaszczyzny o wektor $\vec{u} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, czyli $S_{O_2}S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$.

□ Dowód*. Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt P. Niech P' będzie obrazem P w symetrii S_{O_1}, zaś P'' – obrazem P' w symetrii S_{O_2} (ryc. 7.52).



Ryc. 7.52.

Mamy więc: $P' = S_{O_1}(P)$ i $P'' = S_{O_2}(P')$, skąd:

$(*)$ $P'' = S_{O_2}S_{O_1}(P)$ oraz $\overrightarrow{O_1P'} = -\overrightarrow{O_1P}$ i $\overrightarrow{O_2P''} = -\overrightarrow{O_2P'}$.

Na mocy tych równości otrzymujemy:

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \left(\overrightarrow{PO_1} + \overrightarrow{O_1P'}\right) + \left(\overrightarrow{P'O_2} + \overrightarrow{O_2P''}\right) = 2\overrightarrow{O_1P'} + 2\overrightarrow{P'O_2} =$$

$= 2\left(\overrightarrow{O_1P'} + \overrightarrow{P'O_2}\right) = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, a stąd równość $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, która dowodzi, że:

$(**)$ $P'' = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}(P)$.

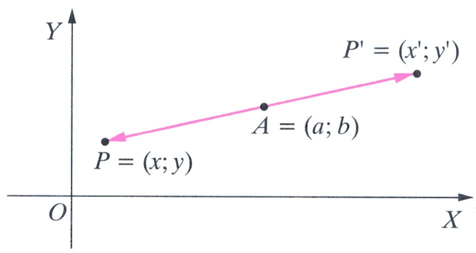
Z równości $(*)$ i $(**)$, wobec dowolności wyboru punktu P, wnosimy, że $S_{O_1}S_{O_2} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$. □

Uwaga. Na rycinie 7.52 mamy, co prawda, przypadek, gdy punkty P, O_1 i O_2 nie leżą na jednej prostej, choć nigdzie w przeprowadzonym rozumowaniu z tego nie skorzystaliśmy.

Wzory określające symetrię środkową

Niech w układzie XOY środek A symetrii S_A ma współrzędne a, b, punkt P – współrzędne x, y, zaś jego obraz P' w symetrii S_A – współrzędne x', y' (ryc. 7.53). Mamy więc:

$A = (a; b)$, $P = (x; y)$, $P' = (x'; y')$.



Ryc. 7.53.

Zatem:

$P' = S_A(P) \iff \overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP} \iff$

$\iff [x' - a; y' - b] = -[x - a; y - b] = [a - x; b - y] \iff$

$\iff x' - a = a - x \ \wedge \ y' - b = b - y \iff$

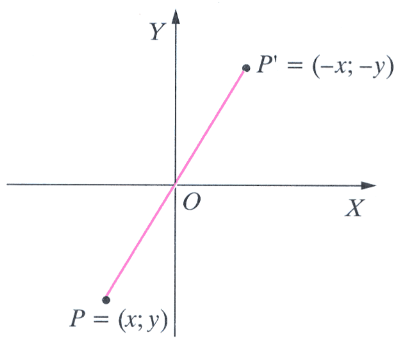
$\iff x' = -x + 2a \ \wedge \ y' = -y + 2b.$

Stąd wynika, że:

$S_{(a;b)}((x; y)) = (-x + 2a; -y + 2b).$

W przypadku, gdy $A = O$, to jest, gdy $a = b = 0$, otrzymujemy wzory (znane nam już z klasy pierwszej) na symetrię względem początku układu współrzędnych (ryc. 7.54):

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$ Zatem $S_{(0;0)}((x; y)) = (-x; -y)$.



Ryc. 7.54.

Przykład 1. Znajdź obraz punktu $P = (-2; 1)$ w symetrii S_A, gdzie $A = (2; 1)$.
Rozwiązanie:

Zgodnie z podanymi wzorami na symetrię środkową:
$P' = (-(-2) + 2 \cdot 2; -1 + 2 \cdot 1) = (2 + 4; -1 + 2) = (6; 1)$.

Przykład 2. Znajdź punkt P, którego obrazem w symetrii $S_{(1;-1)}$ jest punkt $P' = (3; 2)$.
Rozwiązanie:

Niech $P = (x; y)$. Ponieważ $P' = S_{(1;-1)}(P) \iff P = S_{(1;-1)}(P')$, więc:
$P = (-3 + 2 \cdot 1; -2 + 2 \cdot (-1)) = (-1; -4)$.

Pytania i zadania

1. Jakie przekształcenie płaszczyzny nazywamy symetrią środkową?
2. Podaj własności symetrii środkowej.
3. Czy symetria środkowa ma punkty stałe?
4. Omów znany ci związek symetrii środkowej:
   a) z symetrią osiową,
   b) z translacją.
5. Podaj wzory określające symetrię środkową.
6. Znajdź obrazy punktów $A = (-3; 1)$, $B = (2; 4)$, $C = (1; -2)$, $D = (-1; -2)$ w symetrii względem punktu:
   a) $(0; 0)$; b) $(-2; -2)$; c) $(0; 5)$.
7. Posługując się wzorami na symetrię środkową, wykaż, że jest ona izometrią.
8. Udowodnij, że obrazem środka odcinka w symetrii środkowej jest środek obrazu odcinka.
9. Wyznacz symetrię środkową, w której obrazem punktu $A = (3; -2)$ jest punkt $B = (-3; 2)$.

10*. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i jego punkt wewnętrzny P. Niech P_1, P_2, P_3 i P_4 będą obrazami punktu P w symetrii względem środków boków czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że czworokąt $P_1P_2P_3P_4$ jest równoległobokiem o polu dwa razy większym od pola czworokąta $ABCD$.

11*. Dany jest trójkąt ABC. Punkty A_1, B_1 i C_1 są obrazami wierzchołków A, B i C w symetriach odpowiednio S_B, S_C i S_A. Ile razy pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest większe od pola trójkąta ABC?

12**. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 są obrazami wierzchołków A, B, C i D w symetriach odpowiednio S_B, S_C, S_D i S_A. Ile razy pole czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest większe od pola czworokąta $ABCD$?

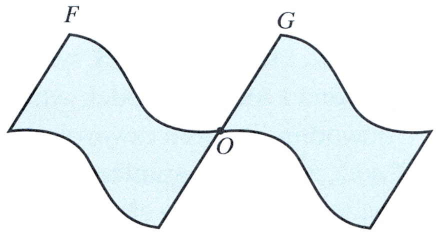
13*. Na płaszczyźnie dane są dwa punkty A i B. Niech O oznacza środek odcinka AB. Udowodnij, że $T_{\overrightarrow{AB}} S_A = S_O$.

14**. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty O_1, O_2, O_3 i A. Niech $A_1 = S_{O_1}(A)$, $A_2 = S_{O_2}(A_1)$, $A_3 = S_{O_3}(A_2)$, $A_4 = S_{O_1}(A_3)$, $A_5 = S_{O_2}(A_4)$, $A_6 = S_{O_3}(A_5)$. Udowodnij, że $A_6 = A$.

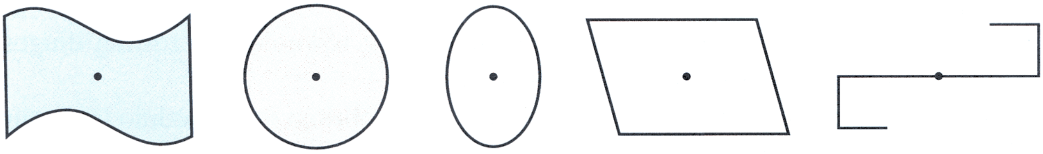
13. Środek symetrii figury. Figury środkowo symetryczne

Jeżeli w symetrii S_O jedna z figur jest obrazem drugiej, to takie dwie figury nazywamy **środkowo symetrycznymi ze sobą** względem punktu O (np. figury F i G na ryc. 7.55).

Może się tak zdarzyć, że w symetrii S_O figura F jest swoim obrazem (ryc. 7.56).



Ryc. 7.55.



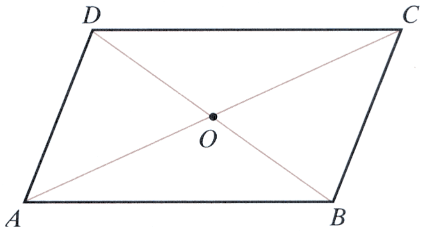
Ryc. 7.56.

Wówczas figura taka nazywa się figurą **środkowo symetryczną**, a punkt O jej **środkiem symetrii**. Środek symetrii figury może do niej należeć lub nie, na przykład:
- odcinek, koło, równoległobok są figurami środkowo symetrycznymi i środek symetrii każdej z tych figur do nich należy;
- okrąg jest figurą środkowo symetryczną, do której środek symetrii nie należy.

Wykażemy teraz, że równoległobok jest figurą środkowo symetryczną. Jego środkiem symetrii jest punkt przecięcia przekątnych. Istotnie, niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, którego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O (ryc. 7.57). Ponieważ O jest środkiem tych przekątnych, więc:

$S_O(A) = C, S_O(C) = A.$

Ponadto $S_O(AB) = CD$ i $S_O(CB) = AD$, gdyż w symetrii środkowej obrazem prostej jest prosta do niej równoległa. Tym samym w symetrii tej obrazem punktu wspólnego prostych AB i CB – a więc punktu B – jest punkt wspólny obrazów prostych AB i CD – czyli punkt D:



Ryc. 7.57.

$S_O(B) = D$ i $S_O(D) = B.$

Zatem w symetrii S_O obrazem równoległoboku $ABCD$ jest równoległobok $ABCD$.

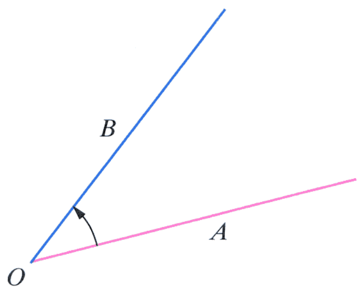
Pytania i zadania

1. Jaką figurę nazywamy środkowo symetryczną?
2. Co to jest środek symetrii figury?
3. Wykaż, że figurami środkowo symetrycznymi są:
   a) odcinek; b) koło (okrąg).
4. Jaki warunek muszą spełniać figury F i G, z których każda ma środek symetrii, aby figura:
   a) $F \cap G$; b) $F \cup G$
   miała środek symetrii?

5. Znajdź środek symetrii odcinka AB, gdy $A = (2; 1)$, $B = (-4; -3)$.
6. Znajdź środek symetrii figury złożonej z dwóch prostych:
   a) przecinających się; b) równoległych.
7. Figurę F, która ma środek symetrii, rozcięto na dwie figury: F_1 i F_2. Udowodnij, że jeżeli jedna z nich ma środek symetrii, to druga także ma środek symetrii.
8. Udowodnij, że jeżeli czworokąt ma środek symetrii, to jest równoległobokiem.
9. Wykaż, że figura ograniczona ma co najwyżej jeden środek symetrii.
10. Zbadaj, kiedy figura złożona:
    a) z dwóch okręgów; b) z trzech okręgów
    ma środek symetrii.
11. Przeciwległe boki sześciokąta wypukłego są parami równoległe i równej długości. Udowodnij, że sześciokąt ten ma środek symetrii.
12*. Na bokach AB, BC, CD i DA równoległoboku $ABCD$ obrano odpowiednio takie punkty A_1, B_1, C_1 i D_1, że czworokąt $A_1B_1C_1D_1$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki te mają wspólny środek symetrii.

14. Obrót płaszczyzny i jego własności

Do omówienia kolejnego przekształcenia geometrycznego płaszczyzny potrzebne będzie określenie pojęcia kąta skierowanego. **Kątem skierowanym** nazywamy uporządkowaną parę półprostych $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ o wspólnym początku O (ryc. 7.58). Półprosta $\overrightarrow{OA}$ to **ramię początkowe**, półprosta $\overrightarrow{OB}$ – **ramię końcowe**, a ich wspólny początek O nosi miano **wierzchołka kąta skierowanego**.

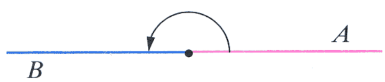


Ryc. 7.58.

Kąty skierowane będziemy oznaczać tak, jak dotąd kąty nieskierowane, na przykład przez α, AOB itp. Na rycinie kąt skierowany oznaczamy łukiem zakończonym strzałką, wskazującą jego końcowe ramię.

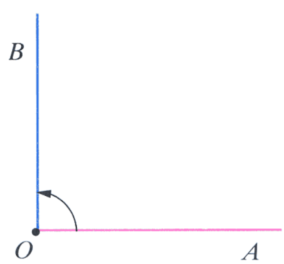
Ryc. 7.59.

Kąt skierowany, którego ramiona się pokrywają, nazywamy kątem skierowanym **zerowym** (ryc. 7.59), kąt skierowany, którego ramiona przedłużają się do prostej – kątem skierowanym **półpełnym** (ryc. 7.60), kąt skierowany zaś, którego ramiona są prostopadłe – kątem skierowanym **prostym** (ryc. 7.61).



Ryc. 7.60.

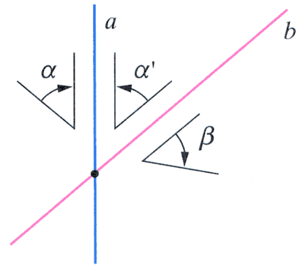
Przyjmujemy, że **kąty skierowane** α i β **są równe**, jeżeli istnieje złożenie dwóch symetrii osiowych, w którym obrazami ramienia początkowego i ramienia końcowego kąta α są odpowiednio ramię początkowe i końcowe kąta β.



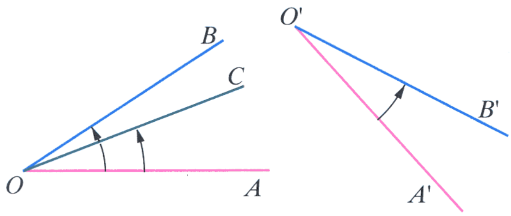
Ryc. 7.61.

Przedstawione na rycinie 7.62 kąty α i β są równe, zaś kąty α i α' oraz α' i β nie są równe – kąty te są **przeciwne**. Mamy więc: $\alpha = \beta$, $\alpha = -\alpha'$, $\alpha' = -\beta$.

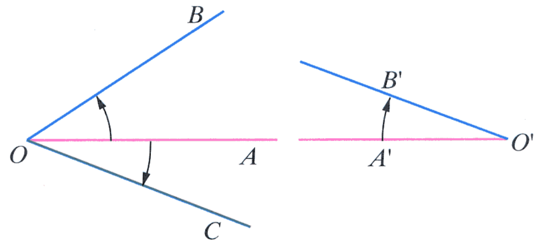
O kątach skierowanych *AOB* i *AOC*, pokazanych na rycinie 7.63, powiemy, że są **zgodnie zorientowane**, podobnie jak o kątach *AOB* i *A'O'B'*. O kątach zaś *AOB* i *AOC*, jak również o kątach *AOB* i *A'OB'* pokazanych na rycinie 7.64 powiemy, że są **przeciwnie zorientowane**.



Ryc. 7.62.

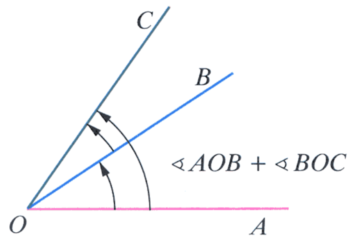


Ryc. 7.63.

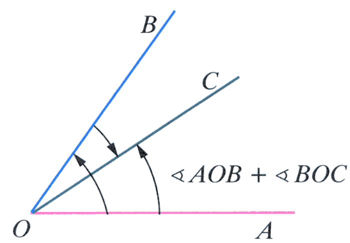


Ryc. 7.64.

Sumą kątów skierowanych *AOB* i *BOC* nazywamy kąt skierowany *AOC*, co zapisujemy: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC$. Na rycinie 7.65 pokazano sumę kątów skierowanych: *AOB* i *BOC* zgodnie zorientowanych, natomiast na rycinie 7.66 przedstawiono sumę kątów *AOB* i *BOC* przeciwnie skierowanych.



Ryc. 7.65.



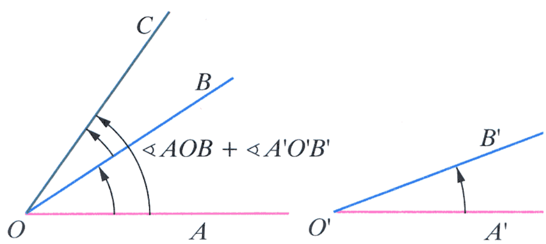
Ryc. 7.66.

Sumą kąta skierowanego *AOB* i kąta skierowanego *A'O'B'* nazywamy sumę kąta skierowanego *AOB* i kąta skierowanego *BOC* równego kątowi skierowanemu *A'O'B'* (ryc. 7.67).

Można dowieść, że dodawanie kątów skierowanych jest przemienne i łączne, to znaczy, że dla dowolnych kątów skierowanych α, β i γ zachodzą równości:

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

b) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.



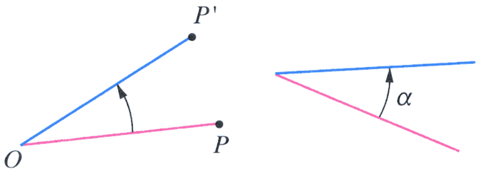
Ryc. 7.67.

Różnicą kątów skierowanych α i β nazywamy sumę kąta skierowanego α i kąta $-\beta$:
$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Jeśli kąt skierowany α jest równy sumie n kątów skierowanych β, gdzie n jest liczbą naturalną, wówczas zapisujemy to $\alpha = n\beta$. Gdy kąt skierowany β spełnia równość $\alpha = n\beta$, można to zapisać również: $\beta = \frac{1}{n}\alpha$.

Obrót

Dany jest na płaszczyźnie punkt O i kąt skierowany α (ryc. 7.68).



Ryc. 7.68.

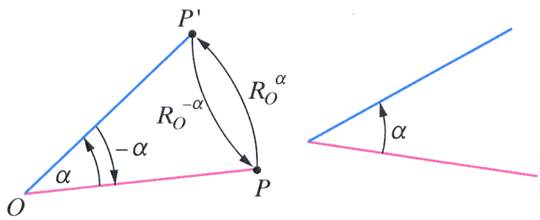
Obrotem albo **rotacją** płaszczyzny dokoła punktu O o kąt skierowany α nazywamy takie jej przekształcenie na siebie, w którym obrazem każdego punktu $P \neq O$ jest taki punkt P', że $OP' = OP$ i $\sphericalangle POP' = \alpha$, zaś obrazem punktu O – ten sam punkt O.

Obrót płaszczyzny dokoła punktu O o kąt skierowany α oznaczać będziemy symbolem R_O^α. Tak więc:

$$P' = R_O^\alpha(P) \iff OP' = OP \text{ i } \sphericalangle POP' = \alpha.$$

Punkt O nazywamy **środkiem obrotu**, a kąt skierowany α **kątem obrotu**.

Obrót jest przekształceniem odwracalnym. Przekształceniem odwrotnym do obrotu o środku O i kącie α jest obrót o tym samym środku O i kącie przeciwnym do α, a więc o kącie $-\alpha$ (ryc. 7.69), co zapisujemy:



Ryc. 7.69.

$$\left(R_O^\alpha\right)^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

Z określenia obrotu wynikają też wnioski.

Wniosek 1. Złożenie dwóch obrotów o wspólnym środku obrotu O i kątach obrotu α i β jest obrotem o środku O i kącie obrotu $\alpha + \beta$, czyli:

$$R_O^\beta R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}.$$

☐ Dowód. Istotnie, niech P' będzie obrazem dowolnego punktu P w obrocie R_O^α, zaś P'' – obrazem punktu P' w obrocie R_O^β (ryc. 7.70). Mamy więc:

$P' = R_O^\alpha(P)$ i $P'' = R_O^\beta(P')$, skąd:

$(*)\ P'' = R_O^\beta R_O^\alpha(P).$

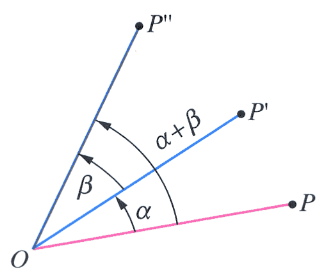
Ponieważ:

$OP = OP'$, $\sphericalangle POP' = \alpha$,

$OP' = OP''$, $\sphericalangle P'OP'' = \beta$, więc:

$OP = OP''$ i $\sphericalangle POP'' = \alpha + \beta$, skąd wynika, że:

$(**)\ P'' = R_O^{\alpha+\beta}(P).$



Ryc. 7.70.

Zatem dla dowolnego punktu P, wobec równości $(*)$ i $(**)$, $R_O^\beta R_O^\alpha(P) = R_O^{\alpha+\beta}(P)$, co dowodzi, że $R_O^\beta R_O^\alpha$ i $R_O^{\alpha+\beta}$ są identycznymi przekształceniami. ▢

Wobec przemienności dodawania kątów skierowanych:

$$R_O^\beta R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta} = R_O^{\beta+\alpha} = R_O^\alpha R_O^\beta,$$

więc składanie obrotów dokoła tego samego punktu jest **przemienne**.

Wniosek 2. Środek O obrotu jest jedynym punktem stałym tego obrotu.

Wniosek 3. Obrót dokoła punktu O o kąt półpełny jest symetrią środkową S_O.

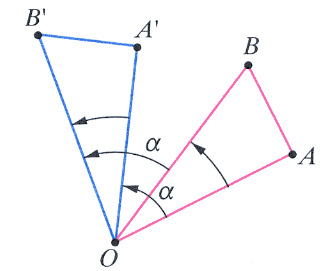
Twierdzenie

Obrót jest izometrią.

▢ Dowód*. Obierzmy na płaszczyźnie dowolnie dwa punkty: A i B i rozważmy ich obrazy odpowiednio A' i B' w obrocie o środku O i kącie obrotu α (ryc. 7.71), to znaczy niech $A' = R_O^\alpha(A)$, $B' = R_O^\alpha(B)$. Wykażemy, że $AB = A'B'$.

Zgodnie z definicją sumy kątów skierowanych mamy:

$$\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle A'OA + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOB' =$$
$$= -\sphericalangle AOA' + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOB' =$$
$$= -\alpha + \sphericalangle AOB + \alpha = \sphericalangle AOB.$$

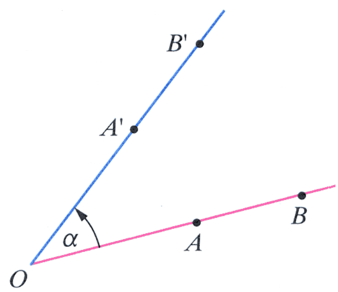


Ryc. 7.71.

Ponadto, jeśli punkty O, A i B nie są współliniowe, to punkty O, A' i B' również są niewspółliniowe (w przeciwnym razie kąty AOA' i BOB' byłyby różne). Zatem trójkąty OAB i $OA'B'$ są przystające na mocy cechy BBB.

Stąd wynika, że $AB = A'B'$.

Gdy zaś punkty O, A i B są współliniowe (ryc. 7.72), wtedy punkty O, A' i B' także są współliniowe i jeśli na przykład $OB > OA$, to $OA + AB = OB$, $OA' + A'B' = OB'$, skąd wobec równości $OA = OA'$ i $OB = OB'$ znowu otrzymujemy równość $AB = A'B'$. ▢



Ryc. 7.72.

Obrót ma więc wszystkie własności izometrii (jakie?).

Kolejne twierdzenie ustala związek między obrotem i symetrią osiową:

Twierdzenie

Obrót R_O^α jest złożeniem dwóch symetrii osiowych S_a i S_b o osiach a i b przecinających się w punkcie O i takich, że kąt skierowany AOB równy jest $\frac{1}{2}\alpha$ (ryc. 7.73).

Ryc. 7.73.

▢ Dowód*. Niech P będzie dowolnym punktem. Rozważmy symetrie S_a i S_b o osiach a i b przecinających się w punkcie O i takich, że $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2}\alpha$ (ryc. 7.74).

Niech $P' = S_a(P)$, $P'' = S_b(P')$. Wówczas:

$OP = OP' = OP''$ oraz $\sphericalangle POQ_1 = \sphericalangle Q_1OP'$ i $\sphericalangle P'OQ_2 = \sphericalangle Q_2OP''$, więc:

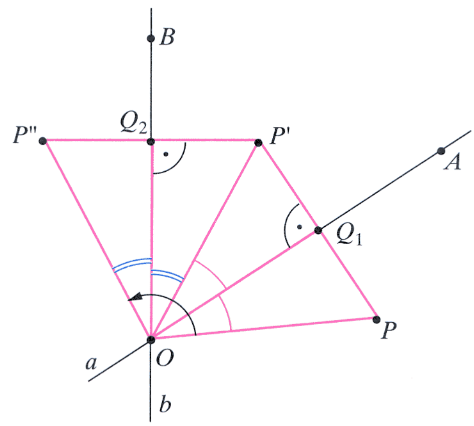
$$\sphericalangle POP'' = (\sphericalangle POQ_1 + \sphericalangle Q_1OP') + (\sphericalangle P'OQ_2 + \sphericalangle Q_2OP'') =$$

$$= 2\sphericalangle Q_1OP' + 2\sphericalangle P'OQ_2 = 2(\sphericalangle Q_1OP' + \sphericalangle P'OQ_2) =$$

$$= 2\sphericalangle Q_1OQ_2 = 2\sphericalangle AOB = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = \alpha.$$

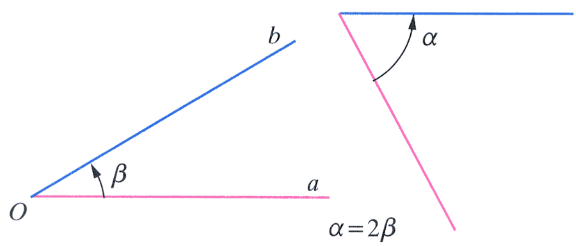
Zatem mamy równości $OP = OP''$ i $\sphericalangle POP'' = \alpha$, z których wynika, że $P'' = R_O^\alpha(P)$.

Ponieważ $P'' = S_b(P') = S_bS_a(P)$, więc $P'' = S_bS_a(P)$, wobec tego dla dowolnego punktu P zachodzi równość $R_O^\alpha(P) = S_bS_a(P)$. Dowodzi ona, że przekształcenia R_O^α i S_bS_a są identyczne, czyli $R_O^\alpha = S_bS_a$. ▢



Ryc. 7.74.

Wniosek. Złożenie dwóch symetrii osiowych o dowolnych przecinających się osiach a i b jest obrotem o środku w ich punkcie przecięcia O o kąt równy podwojonemu kątowi β, gdzie β jest którymkolwiek z kątów skierowanych o wierzchołku O i ramionach wyznaczonych przez punkt O na prostych a i b (ryc. 7.75).

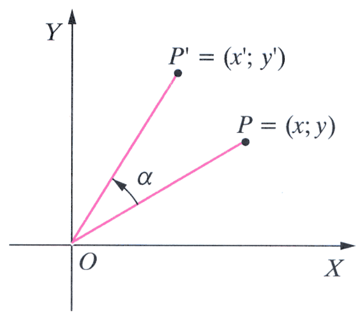


Ryc. 7.75.

Wzory określające obrót

Przyjmijmy, że środek O obrotu płaszczyzny o dany kąt skierowany α jest początkiem układu współrzędnych XOY (ryc. 7.76). Niech punkt P ma w tym układzie współrzędne x, y, a jego obraz P' w obrocie R_O^α – współrzędne x', y', czyli:

$$P = (x; y),\ P' = (x'; y').$$



Ryc. 7.76.

Można dowieść, że zachodzą zależności:

$$(*)\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

(dowód pomijamy, gdyż wykracza on poza ramy naszego podręcznika).

Podane równości $(*)$ są wzorami określającymi obrót płaszczyzny dokoła punktu $O=(0;0)$ o kąt skierowany α. Tak więc:

$$R^{\alpha}_{(0;0)}((x;y))=(x\cos\alpha-y\sin\alpha;x\sin\alpha+y\cos\alpha).$$

Gdy $\alpha=180°$, to wzory $(*)$ przybierają postać:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y. \end{cases}$$

Wzory te określają, jak wiemy, symetrię środkową względem punktu O:

$$R^{180°}_{(0;0)}=S_{(0;0)}.$$

Wzory na przekształcenie odwrotne do obrotu określonego wzorami $(*)$ otrzymamy, wyznaczając z nich x i y w zależności od x' i y'. Ponieważ przekształcenie to jest obrotem o kąt $-\alpha$, więc wzory na nie otrzymamy, podstawiając w równościach $(*)$ zamiast x', y', x, y, α odpowiednio x, y, x', y' i $-\alpha$. Wtedy:

$$\begin{cases} x=x'\cos(-\alpha)-y'\cdot\sin(-\alpha) \\ y=x'\sin(-\alpha)+y'\cdot\cos(-\alpha), \text{ czyli:} \end{cases}$$

$$(**)\begin{cases} x=x'\cos\alpha+y'\cdot\sin\alpha \\ y=-x'\sin\alpha+y'\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Z równości $(**)$ korzystamy zazwyczaj wtedy, gdy chcemy znaleźć równanie obrazu jakiejś linii w obrocie dokoła punktu $(0;0)$.

Przykład 1. Znajdź obrazy punktów $A=(3;2)$, $B=(1;1)$, $C=(0;1)$ w obrocie dokoła punktu $(0;0)$ o kąt $\alpha=45°$.

Rozwiązanie:

Podstawiając do równań:

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

w miejsce x i y współrzędne danych punktów oraz $\alpha=45°$, otrzymujemy obrazy A', B', C' odpowiednio tych punktów, mianowicie:

$$A'=(3\cdot\cos45°-2\sin45°;3\sin45°+2\cos45°)=$$

$$=\left(3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$B'=(1\cdot\cos45°-1\cdot\sin45°;1\cdot\sin45°+1\cdot\cos45°)=\left(0;\sqrt{2}\right),$$

$$C'=(0\cdot\cos45°-1\cdot\sin45°;0\cdot\sin45°+1\cdot\cos45°)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Przykład 2. Znajdź równanie obrazu paraboli o równaniu $y=x^2$ w obrocie dokoła punktu $(0;0)$ o kąt $\alpha=90°$.

Rozwiązanie:

Podstawiając do równania $y=x^2$ wartości x i y ze wzorów $(**)$ dla $\alpha=90°$, czyli:

$$x=x'\cdot\cos90°+y'\sin90°=y', \qquad y=-x'\sin90°+y'\cos90°=-x'$$

i opuszczając kreski, otrzymujemy równanie $-x=y^2$, czyli równanie $y^2=-x$ szukanego obrazu.

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij pojęcia:
   a) kąt skierowany;
   b) kąty skierowane równe;
   c) kąty skierowane przeciwne;
   d) suma kątów skierowanych.
2. Jakie przekształcenie płaszczyzny nazywamy obrotem?
3. Omów, czym jest:
   a) przekształcenie odwrotne do obrotu R_O^{α},
   b) złożenie obrotów R_O^{α} i R_O^{β}.
4. Podaj związek obrotu z symetrią osiową.
5. Podaj wzory określające obrót $R^{\alpha}_{(0;\,0)}$.
6. Znajdź obrazy punktów $A=(2;1)$, $B=(-1;2)$ w obrocie dokoła punktu $(0;0)$ o kąt $\alpha=120°$.
7. Znajdź wierzchołek C trójkąta równobocznego ABC, wiedząc, że $A=(0;0)$, $B=(3;2)$.
8. Dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$ są punkty $A=(0;0)$ i $B=(3;4)$. Znajdź pozostałe wierzchołki tego kwadratu.
9. Wykaż metodą współrzędnych, że obrót jest izometrią.
10. Znajdź równanie obrazu prostej o równaniu $y=-2x+1$ w obrocie dokoła punktu $(0;0)$ o kąt $\alpha=-60°$.
11. Znajdź równanie obrazu okręgu o równaniu $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ w obrocie dokoła punktu $(0;0)$ o kąt $\alpha=135°$.
12. Obróć następujące figury:
    a) trójkąt ABC;
    b) równoległobok $ABCD$;
    c) kwadrat $ABCD$;
    d) dowolny czworokąt $ABCD$
    dokoła punktu A o kąt skierowany odpowiednio:
    a) BAC;
    b) BCD;
    c) ACB;
    d) CAB.

13*. Na odcinku AE po jego jednej stronie zbudowano trójkąty równoboczne ABC i CDE. Niech M i P będą środkami odpowiednio odcinków AD i BE. Udowodnij, że trójkąt CMP jest równoboczny.

14*. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku $\overset{\frown}{AB}$ nieprzechodzącym przez punkt C obrano punkt M. Udowodnij, że $MC=MA+MB$.

15*. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkt K jest środkiem przekątnej BD, a punkt M – środkiem boku EF. Udowodnij, że trójkąt AMK jest równoboczny.

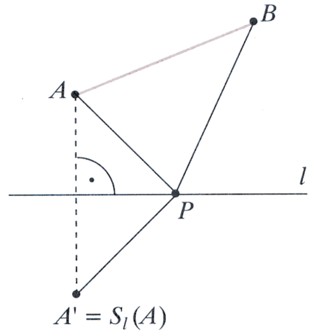
16. Przez środek kwadratu poprowadzono dwie proste prostopadłe. Wykaż, że proste te przecinają boki danego kwadratu w wierzchołkach pewnego kwadratu.

15. Metoda przekształceń geometrycznych w zadaniach

Pokażemy teraz przykłady zastosowań przekształceń geometrycznych, a dokładniej izometrii, w zadaniach konstrukcyjnych i zadaniach na dowodzenie.

Przykład 1. Dane są: prosta l i dwa punkty A i B po jednej stronie tej prostej. Skonstruuj taki punkt P na prostej l, aby długość łamanej APB była najmniejsza.
Rozwiązanie:

Niech A' będzie obrazem punktu A w symetrii osiowej S_l, zaś P – dowolnym punktem P prostej l (ryc. 7.77). Z własności symetrii wynika, że $AP = A'P$, więc $AP + PB = A'P + PB \geqslant A'B$, przy czym równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P należy do odcinka $A'B$. Wobec tego szukany punkt P jest punktem przecięcia prostej l i odcinka $A'B$.

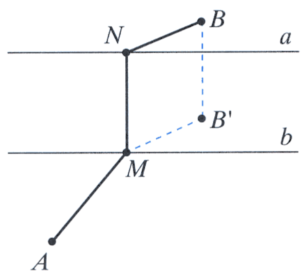


Ryc. 7.77.

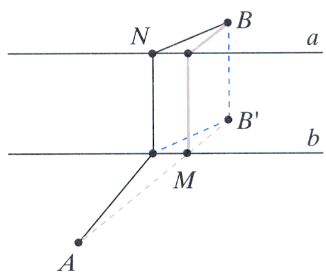
Przykład 2. Na przeciwnych brzegach rzeki stoją dwa domki: A i B. Brzegi te biegną równolegle do siebie. W którym miejscu należy zbudować na rzece most MN prostopadły do brzegów rzeki, aby uzyskać najkrótszą drogę od A do B?
Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że brzegami tej rzeki są proste a i b, a łamana $AMNB$ – drogą od A do B przez most MN (ryc. 7.78). Długość odcinka MN jest stała i równa odległości prostych równoległych a i b. Dlatego zadanie sprowadza się do znalezienia takiego położenia mostu MN, aby suma $AM + NB$ była najmniejsza.

Niech B' będzie obrazem punktu B w translacji o wektor $\overrightarrow{NM}$. Ponieważ $AM + NB = AM + MB'$, bo $NB = MB'$, więc zadanie sprowadza się do znalezienia takiego punktu M, aby suma $AM + MB'$ była najmniejsza.



Ryc. 7.78.

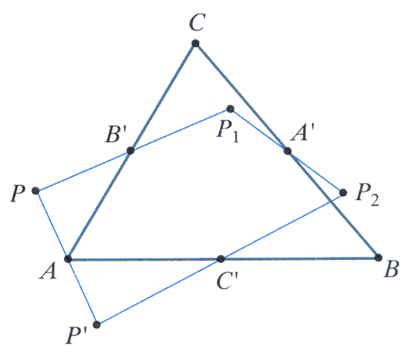


Ryc. 7.79.

Punkt B' jest znany, gdyż $BB' \parallel NM$ i $BB' = NM$. Leży on po przeciwnej stronie prostej b niż punkt A. Zatem suma $AM + MB'$ jest najmniejsza, gdy M należy do odcinka AB'. Z tego wynika konstrukcja przedstawiona na rycinie 7.79. Zadanie ma zawsze rozwiązanie i to tylko jedno.

Przykład 3. Zbuduj trójkąt, mając dane środki A', B', C' jego boków.
Rozwiązanie:

Narysujmy dowolny trójkąt ABC i oznaczmy środki jego boków BC, CA i AB odpowiednio przez A', B' i C' (ryc. 7.80).



Ryc. 7.80.

Wtedy: $S_{C'}S_{A'}S_{B'}(A) = S_{C'}S_{A'}(C) = S_{C'}(B) = A$.

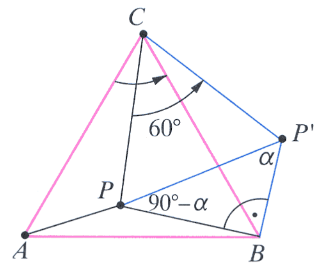
Punkt A jest punktem stałym przekształcenia $S_{C'}S_{A'}S_{B'}$, które jest symetrią środkową (wykaż to!), a więc jest to S_A, czyli $S_{C'}S_{A'}S_{B'} = S_A$.

Obierając dowolnie punkt P, znajdujemy jego obraz $P' = S_{C'}S_{A'}S_{B'}(P)$ i otrzymujemy odcinek, którego środkiem jest punkt A. Konstrukcja trójkąta o danych środkach A', B', C' jego boków jest zatem następująca: obieramy punkt P, znajdujemy $P' = S_{C'}S_{A'}S_{B'}(P)$ i środek A odcinka PP'. Następnie wyznaczamy $C = S_{B'}(A)$ i $B = S_{A'}(C)$.

Przykład 4. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC dany jest taki punkt P, że $CP^2 = AP^2 + PB^2$. Udowodnij, że $\sphericalangle APB = 150°$.

Rozwiązanie:

Obróćmy płaszczyznę wokół punku C o kąt $60°$ i punkt P' niech będzie w tym obrocie obrazem punktu P (ryc. 7.81). Wtedy otrzymamy trójkąt równoboczny CPP', a ponadto równość $AP = BP'$. Ponieważ $PP' = CP$, więc na mocy założenia $PP'^2 = AP^2 + PB^2$. Równość ta dowodzi, że trójkąt PBP' jest prostokątny o kącie prostym PBP'. Niech $\sphericalangle BP'P = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle BPP' = 90° - \alpha$, $\sphericalangle APC = \sphericalangle BP'C = 60° + \alpha$. Wobec tego $\sphericalangle APC + \sphericalangle CPP' + \sphericalangle P'PB = 60° + \alpha + 60° + 90° - \alpha = 210°$, skąd wynika, że $\sphericalangle APB = 150°$.

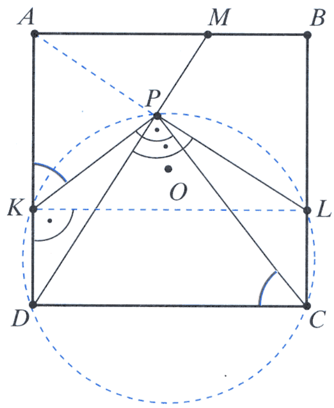


Ryc. 7.81.

Przykład 5*. Na bokach AB i AD kwadratu $ABCD$ obrano punkty M i K, a na odcinku MD punkt P w taki sposób, że $AM = AK$ i $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PKA$. Udowodnij, że $\sphericalangle APM = 90°$.

Rozwiązanie:

Obierzmy na boku BC taki punkt L, że $BL = AK$ (ryc. 7.82). Opiszmy na prostokącie $KLCD$ okrąg. Przechodzi on, oczywiście, przez punkt P, gdyż $\sphericalangle DCP + \sphericalangle DKP = 180°$. Stąd $\sphericalangle LPD = \sphericalangle LKD = 90°$. Ponadto $\Delta MAD \equiv \Delta LBA$ – na mocy cechy BKB. Obróćmy płaszczyznę wokół środka O danego kwadratu o kąt $90°$. W obrocie tym obrazem trójkąta LBA jest trójkąt MAD, więc $DM \perp AL$. Ponieważ $LP \perp DM$, więc punkty L, P i A leżą na jednej prostej. Stąd $\sphericalangle APM = 90°$.



Ryc. 7.82.

Pytania i zadania

1. Zbuduj czworokąt $ABCD$, mając dane jego boki i wiedząc, że przekątna AC jest dwusieczną kąta BAD.
2. Wewnątrz kąta wypukłego dany jest punkt P. Poprowadź przez punkt P prostą tak, aby stał się on środkiem odcinka wyciętego na tej prostej przez ramiona danego kąta.
3. Wewnątrz danego kąta wypukłego obrano dwa punkty: A i B. Zbuduj równoległobok, którego dwoma przeciwległymi wierzchołkami są punkty A i B, a pozostałe wierzchołki leżą na ramionach danego kąta.
4. Dane są: punkt A, prosta i okrąg. Poprowadź drugą prostą tak, aby odcinek zawarty między punktami przecięcia tej prostej z daną prostą i danym okręgiem miał środek w punkcie A.

5. Przez punkt wspólny A okręgów S_1 i S_2 poprowadź prostą tak, aby okręgi te wycinały na niej równe cięciwy.
6*. Dany jest kwadrat $ABCD$. Na boku AB obrano punkt E, a na boku BC – punkt F tak, że $BE = BF$. Punkt N jest rzutem punktu B na prostą CE. Udowodnij, że $\sphericalangle DNF = 90°$.
7*. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ obrano takie punkty M i K, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAK$. Udowodnij, że $BM + KD = AK$.

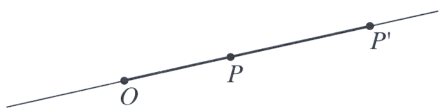
16. Jednokładność płaszczyzny i jej własności

Obok przekształceń geometrycznych niezmieniających odległości punktów (izometrii) istnieją również przekształcenia, w których odległości punktów zmieniają się w stałym stosunku, to znaczy odległości obrazów punktów pozostają w stałym stosunku do odległości tych punktów (w przekształceniach tych figury zachowują „kształt"). Tego rodzaju przekształcenia stosują inżynierowie i architekci, projektując budynki, maszyny itp. Zdjęcie wykonane za pomocą aparatu fotograficznego również jest takim przekształceniem. Przekształceniami tymi są jednokładność i podobieństwo. Najpierw zajmijmy się jednokładnością.

Obierzmy na płaszczyźnie punkt O i ustalmy liczbę rzeczywistą k, różną od zera.

Każdemu punktowi P płaszczyzny, różnemu od O, przyporządkujmy punkt P' na prostej OP (ryc. 7.83) taki, że $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, zaś punktowi O – ten sam punkt O. Określone w ten sposób przekształcenie płaszczyzny na siebie nazywamy **jednokładnością o środku O i stosunku k** i oznaczamy symbolem: J_O^k. Tak więc:

$$P' = J_O^k(P) \iff \overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$



Ryc. 7.83.

Środek O jednokładności, dowolny punkt $P \neq O$ i jego obraz P' w tej jednokładności leżą na jednej prostej.

Jeżeli $k > 0$, to **jednokładność** J_O^k nazywamy **dodatnią** lub **prostą**. Punkty P i P' leżą wówczas na tej samej półprostej o początku O, przy czym P' leży dalej od O niż P, gdy $k > 1$ (ryc. 7.84), bliżej zaś, gdy $k < 1$ (ryc. 7.85).

Ryc. 7.84.

Ryc. 7.85.

Jeżeli $k < 0$, to **jednokładność** J_O^k nazywamy **ujemną** lub **odwrotną**. Wówczas punkty P i P' leżą na dwóch uzupełniających się półprostych o początku O, przy czym P' leży dalej od O niż P, gdy $k < -1$ (ryc. 7.86), bliżej zaś, gdy $k > -1$ (ryc. 7.87).

Ryc. 7.86.

Ryc. 7.87.

Gdy $k = 1$, to jednokładność J_O^k jest przekształceniem tożsamościowym. Jednokładność o stosunku $k = -1$ jest symetrią środkową, której środkiem jest środek jednokładności.

Bezpośrednio z definicji jednokładności wynika też, że jednokładność jest przekształceniem odwracalnym; przekształceniem odwrotnym do jednokładności J_O^k jest jednokładność $J_O^{\frac{1}{k}}$. Otrzymujemy bowiem:

$$P' = J_O^k(P) \iff \overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP} \iff \overrightarrow{OP} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OP'} \iff P = J_O^{\frac{1}{k}}(P').$$

Tak więc:

$$\left(J_O^k\right)^{-1} = J_0^{\frac{1}{k}}.$$

Zauważmy przy tym, że $J_O^k = J_O^{\frac{1}{k}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = \frac{1}{k}$, czyli gdy $k^2 = 1$, a zatem, gdy $k = 1$ lub $k = -1$. Wnioskujemy stąd, że jednokładność i przekształcenie do niej odwrotne są identycznymi przekształceniami, gdy jednokładność jest przekształceniem tożsamościowym ($k = 1$) lub symetrią środkową ($k = -1$).

Środek jednokładności nietożsamościowej jest jej jedynym punktem stałym, bowiem gdy $k \neq 1$, to:

$$P = J_O^k(P) \iff \overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OP} \iff (1-k)\overrightarrow{OP} = \vec{O} \iff \overrightarrow{OP} = \vec{O} \iff O = P.$$

Powstaje teraz pytanie: Czym jest złożenie dwóch jednokładności o tym samym środku O i stosunkach k_1 i k_2?

Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt P. Niech P' będzie obrazem P w jednokładności $J_O^{k_1}$, zaś P'' niech będzie obrazem P' w jednokładności $J_O^{k_2}$. Otrzymujemy więc:

$P' = J_O^{k_1}(P)$ i $P'' = J_O^{k_2}(P')$, skąd:

$(*)$ $P'' = J_O^{k_2} J_O^{k_1}(P)$, a ponadto:

$\overrightarrow{OP'} = k_1 \cdot \overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OP''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OP'}$.

Z równości tych wnosimy, że $\overrightarrow{OP''} = k_2\left(k_1\overrightarrow{OP}\right) = (k_2 k_1)\overrightarrow{OP} = (k_1 k_2)\overrightarrow{OP}$, a stąd, że:

$(**)$ $P'' = J_O^{k_2 k_1}(P) = J_O^{k_1 k_2}(P)$.

Ponieważ punkt P wybraliśmy dowolnie, więc równości $(*)$ i $(**)$ dowodzą, że przekształcenia $J_O^{k_2} J_O^{k_1}$, $J_O^{k_2 k_1}$ i $J_O^{k_1 k_2}$ są identyczne.

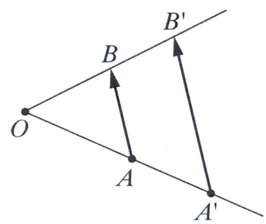
Wniosek. Złożenie dwóch jednokładności o tym samym środku i stosunkach k_1 i k_2 jest jednokładnością o tymże środku i o stosunkach $k_1 \cdot k_2$, a przy tym składanie jednokładności jest przemienne. Tak więc:

$$J_O^{k_2} J_O^{k_1} = J_O^{k_1 k_2} = J_O^{k_2 k_1} = J_O^{k_1} J_O^{k_2}.$$

Rozstrzygnijmy teraz, czym jest obraz wektora w jednokładności.

Wybierzmy na płaszczyźnie dowolnie punkty A i B i oznaczmy przez A' i B' odpowiednio ich obrazy w jednokładności J_O^k, to znaczy, niech:

$$A' = J_O^k(A) \text{ i } B' = J_O^k(B).$$



Ryc. 7.88.

Stąd $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

Wobec tego (ryc. 7.88):

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} =$$

$$= k \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ czyli:}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Zatem w jednokładności o stosunku k obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ jest wektor $k \cdot \overrightarrow{AB}$:

$$J_O^k\left(\overrightarrow{AB}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Można udowodnić, że na odwrót:

Przekształcenie T płaszczyzny, w którym obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ jest wektor $k \cdot \overrightarrow{AB}$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą różną od 1, jest nietożsamościową jednokładnością. !

Otrzymana odpowiedź na pytanie o obraz wektora w jednokładności pozwala wysnuć jeszcze jeden wniosek:

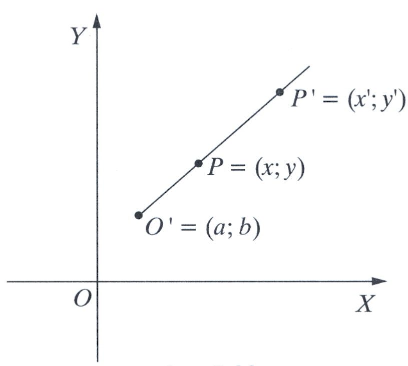
Wniosek. W jednokładności o stosunku k stosunek odległości obrazów punktów do odległości tych punktów jest równy $|k|$.

Wzory określające jednokładność

Aby jednokładność przedstawić przy użyciu współrzędnych, obierzmy za środek jednokładności o stosunku k punkt, który w układzie XOY ma współrzędne a, b. Oznaczmy ten środek przez O', żeby odróżnić go od początku O układu XOY (ryc. 7.89).

Niech P będzie dowolnym punktem, mającym współrzędne x, y, a jego obraz P' w jednokładności $J_{O'}^k$ niech ma współrzędne x', y'. Otrzymujemy więc:

$$O' = (a; b),\ P = (x; y),\ P' = (x'; y').$$



Ryc. 7.89.

Stąd:

$$P' = J_{O'}^{\,k}(P) \iff \overrightarrow{O'P'} = k \cdot \overrightarrow{O'P} \iff [x'-a; y'-b] = k \cdot [x-a; y-b] \iff$$

$$\iff x'-a = k(x-a) \text{ i } y'-b = k(y-b) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b. \end{cases}$$

Otrzymane wzory:

$$(*)\begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b. \end{cases}$$

określają jednokładność o środku $O' = (a; b)$ i stosunku k. Tak więc:

$$J_{(a;b)}^{k}((x;y)) = (k(x-a)+a; k(y-b)+b).$$

W sytuacji, gdy $a = b = 0$, to jest gdy środek jednokładności o stosunku k jest początkiem układu współrzędnych, wzory $(*)$ przybierają prostszą postać:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

Zatem:

$$J_{(0;0)}^{k}((x;y)) = (kx; ky).$$

Na przykład obrazami punktów $A = (4; 2)$, $B = (4; 4)$, $C = (2; 4)$ w jednokładności o środku $(0; 0)$ i stosunku $\frac{1}{2}$ są punkty $A' = (2; 1)$, $B' = (2; 2)$, $C' = (1; 2)$, a w jednokładności o środku $(0; 0)$ i stosunku $-\frac{1}{2}$ są nimi punkty $A'' = (-2; -1)$, $B'' = (-2; -2)$, $C'' = (-1; -2)$ (ryc. 7.90).

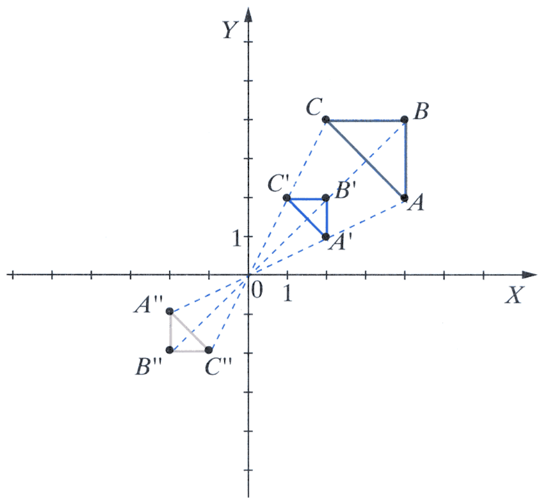
Z otrzymanych wzorów:

$$\begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$$

wynikają znane nam już własności jednokładności. Wyznaczając z tych równości x i y, otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}(x'-a)+a \\ y = \frac{1}{k}(y-b)+b, \end{cases}$$

a więc wzory na przekształcenie odwrotne do jednokładności $J_{(a;b)}^{k}$, które jak widzimy, jest jednokładnością o tymże środku i stosunku $\frac{1}{k}$. Gdy $k = 1$, jednokładność jest przekształceniem tożsamościowym, bowiem wzory $(*)$ przybierają postać: $x' = x$ i $y' = y$. Złożenie dwóch jednokładności o tym samym środku $(a; b)$ i stosunkach k_1 i k_2 jest jednokładnością o tym samym środku i stosunku $k_1 \cdot k_2$.



Ryc. 7.90.

Jeśli bowiem:

$x' = k_1(x - a) + a$, $y' = k_1(y - b) + b$ oraz:

$x'' = k_2(x' - a) + a$, $y'' = k_2(y' - b) + b$, wówczas:

$$x'' = k_2(k_1(x - a) + a - a) + a = k_1 k_2 (x - a) + a,$$

$$y'' = k_2(k_1(y - b) + b - b) + b = k_1 k_2 (y - b) + b.$$

Rozważmy teraz sytuację, w której obrazami punktów $A = (x_1; y_1)$ i $B = (x_2; y_2)$ w jednokładności $J^k_{(a;b)}$ są odpowiednio punkty $A' = (x_1'; y_1')$ i $B' = (x_2'; y_2')$. Wówczas:

$x_1' = k(x_1 - a) + a$ i $y_1' = k(y_1 - b) + b$ oraz:

$x_2' = k(x_2 - a) + a$ i $y_2' = k(y_2 - b) + b$. Zatem:

$$\overrightarrow{A'B'} = [x_2' - x_1'; y_2' - y_1'] =$$

$$= [k(x_2 - a) + a - k(x_1 - a) - a; k(y_2 - b) + b - k(y_1 - b) - b] =$$

$$= [k(x_2 - x_1); k(y_2 - y_1)] = k \cdot [x_2 - x_1; y_2 - y_1] = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

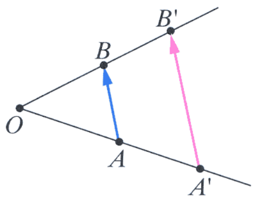
Tak więc współrzędne wektora $\overrightarrow{A'B'}$ będącego obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w jednokładności są iloczynami współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$ i stosunku k.

Pytania i zadania

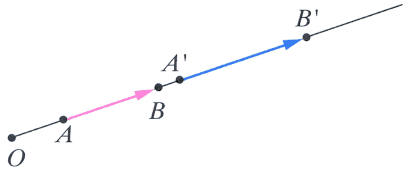
1. Jakie przekształcenie płaszczyzny nazywamy jednokładnością?
2. Wymień własności jednokładności wynikające z jej definicji.
3. Czy jednokładność jest przekształceniem odwracalnym? Jeśli tak, to co jest do niego przekształceniem odwrotnym?
4. Czym jest złożenie jednokładności o tym samym środku?
5. Podaj wzory określające jednokładność o środku $(a; b)$ i stosunku k.
6. Dane są dwa punkty A i B oraz liczba k. Wyznacz obrazy punktów A i B w jednokładnościach odpowiednio J^k_B i J^k_A, gdy:
   a) $k = \frac{3}{2}$; b) $k = -2$; c) $k = 3$.
7. Dane są punkty A i B. Znajdź środek O jednokładności J^k_O takiej, że $B = J^k_O(A)$ oraz:
   a) $k = -2$; b) $k = \frac{1}{2}$; c) $k = 2$.
8. Znajdź obrazy punktów $A = (1; 1)$, $B = (0; 2)$, $C = (2; 6)$ w jednokładności o środku O i stosunku k, gdy:
   a) $O = (-2; 1)$, $k = 2$; b) $O = (1; -2)$, $k = -2$;
   c) $O = (0; 0)$, $k = 3$; d) $O = (0; 1)$, $k = -3$.
9. Jakie przekształcenia określają wzory:
   a) $x' = 3x - 2$, $y' = 3y - 2$; b) $x' = 2x + 2$, $y' = 2y + 3$;
   c) $x' = 3x + 2$, $y' = 3y - 1$; d) $x' = 3(x + 2)$, $y' = 3(y - 1)$?
10. Znajdź obrazy linii:
    a) $y = -2x + 6$; b) $y = x^2 + 1$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
    w jednokładności o środku $(0; 0)$ i stosunku -2.

17. Obrazy figur w jednokładności. Figury jednokładne

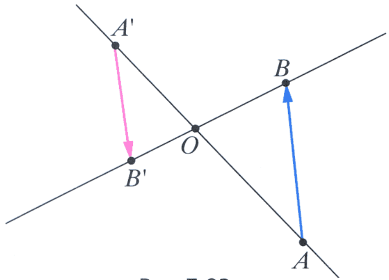
Wiemy już, że obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w jednokładności o stosunku k jest wektor $k \cdot \overrightarrow{AB}$, a zatem wektor równoległy do danego wektora, o zwrocie zgodnym ze zwrotem tego wektora, gdy $k > 0$ (ryc. 7.91 i 7.92), a przeciwnym do jego zwrotu, gdy $k < 0$ (ryc. 7.93 i 7.94).



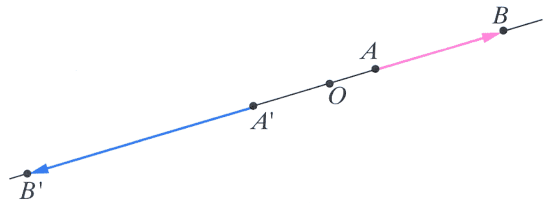
Ryc. 7.91.



Ryc. 7.92.



Ryc. 7.93.



Ryc. 7.94.

Wynikają stąd ważne wnioski, dotyczące obrazów figur w jednokładności:

Wniosek 1. Obrazem odcinka, półprostej i prostej w jednokładności jest odpowiednio odcinek, półprosta i prosta.

Wniosek 2. Jednokładność zachowuje współliniowość punktów i ich uporządkowanie na prostej.

Wniosek 3. Obrazem prostej w jednokładności jest prosta do niej równoległa, a półprostej – półprosta do niej równoległa i o zgodnym zwrocie, gdy jednokładność jest dodatnia, o zwrocie przeciwnym, gdy jednokładność jest ujemna.

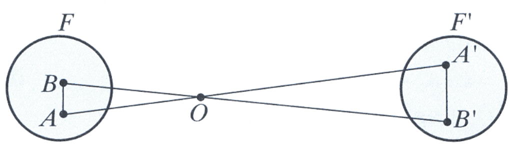
Wniosek 4. Obrazem odcinka o długości d w jednokładności o stosunku k jest odcinek do niego równoległy i o długości równej $|k| \cdot d$.

Wniosek 5. Obrazem figury wypukłej w jednokładności jest figura wypukła.

Istotnie, niech F' będzie obrazem figury wypukłej F w jednokładności J_O^k oraz niech A' i B' będą dwoma dowolnymi punktami figury F'. Są one więc obrazami dwóch punktów A i B figury F i przy tym,

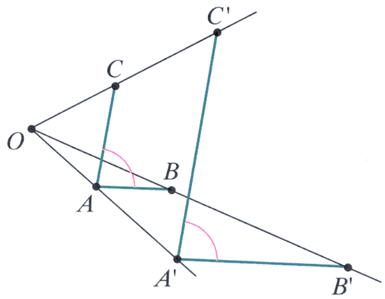
jeśli $A' = J_O^k(A)$, $B' = J_O^k(B)$, to $A = J_O^{\frac{1}{k}}(A')$ i $B = J_O^{\frac{1}{k}}(B')$.

Ponieważ odcinek AB zawiera się w figurze F (bo jest ona wypukła), więc jego obraz $A'B'$ w tej jednokładności zawiera się w obrazie figury F w tej jednokładności, czyli w figurze F' (ryc. 7.95), co wobec dowolności punktów A' i B' dowodzi, że figura F' jest wypukła.

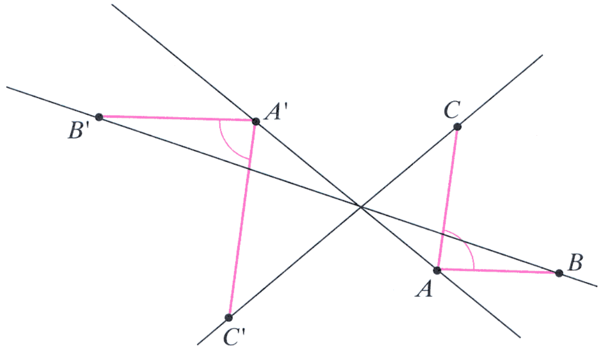


Ryc. 7.95.

Wniosek 6. Obrazem kąta w jednokładności jest kąt do niego przystający (ryc. 7.96 i 7.97).

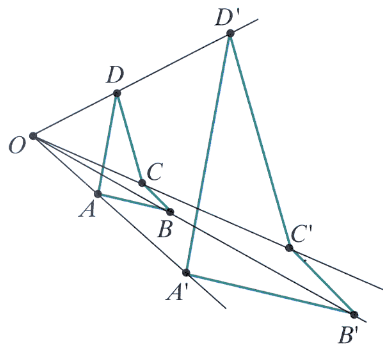


Ryc. 7.96.

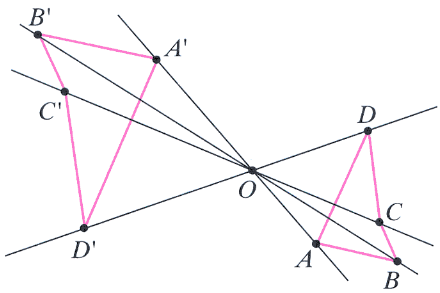


Ryc. 7.97.

Wniosek 7. Obrazem wielokąta w jednokładności jest wielokąt o kątach odpowiednio równych jego kątom i o bokach odpowiednio równoległych do jego boków (ryc. 7.98 i 7.99).



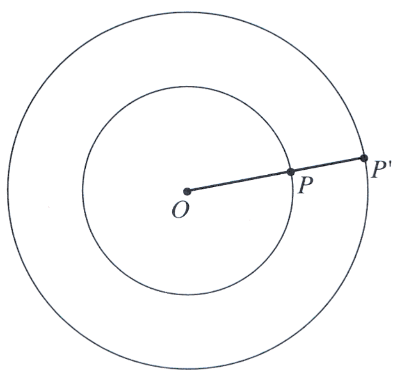
Ryc. 7.98.



Ryc. 7.99.

Wniosek 8. Obrazem okręgu (koła) o promieniu długości r w jednokładności o stosunku k jest okrąg (koło) o promieniu długości $|k| \cdot r$.

Istotnie, rozważmy dowolny okrąg o środku O i promieniu długości r i jednokładność o środku O i stosunku k (ryc. 7.100). Jednokładność ta przekształca dowolny punkt P tego okręgu na taki punkt P', że $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, więc $OP' = |k| \cdot OP$. Wobec tego punkt P' leży na okręgu o środku O i promieniu długości $|k| \cdot r$. Na odwrót, każdy punkt P' okręgu o promieniu długości $|k| \cdot r$ przekształca się w jednokładności $J_O^{\frac{1}{k}}$ na taki punkt P, że $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OP'}$, skąd $OP = \left|\frac{1}{k}\right| \cdot OP' = \frac{1}{|k|} \cdot |k| \cdot r = r$, co oznacza, że P należy do okręgu o środku O i promieniu długości r. Podobnie dowodzimy, że obrazem koła o promieniu długości r jest w jednokładności J_O^k koło o promieniu długości $|k| \cdot r$.



Ryc. 7.100.

Figury jednokładne

Dwie figury F i G nazywamy **jednokładnymi**, gdy istnieje jednokładność, która jedną z tych figur przekształca na drugą.

Środek tej jednokładności nazywamy **środkiem jednokładności** figur, a jej stosunek – **stosunkiem jednokładności** tych figur.

Z definicji tej i z wniosków opisujących obrazy figur w jednokładności wynikają bezpośrednio następujące wnioski:

Wniosek 1. Dwie proste (półproste, dwa odcinki) są jednokładne wtedy i tylko wtedy, gdy są równoległe.

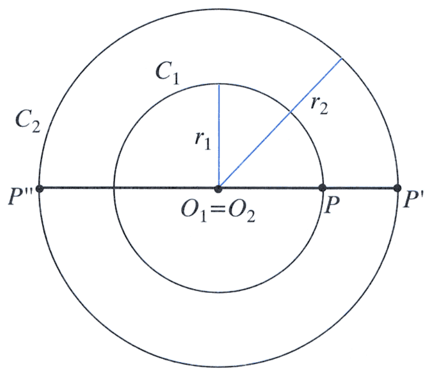
Wniosek 2. Dwa kąty są jednokładne wtedy i tylko wtedy, gdy są równe i ich odpowiednie ramiona są równoległe.

Wniosek 3. Dwa trójkąty (wielokąty) są jednokładne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie ich kąty są równe i odpowiednie boki są równoległe.

Twierdzenie

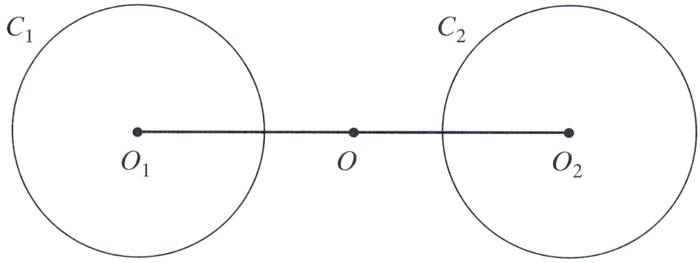
Każde dwa okręgi (koła) są jednokładne.

☐ Dowód. Gdy okręgi są współśrodkowe i przystające, twierdzenie jest oczywiste. Gdy okręgi są współśrodkowe i nieprzystające (ryc. 7.101), to okrąg C_1 o promieniu r_1 przekształca się na okrąg C_2 o promieniu r_2 w jednokładnościach o środku O_1 i stosunkach odpowiednio $\frac{r_2}{r_1}$ i $-\frac{r_2}{r_1}$.



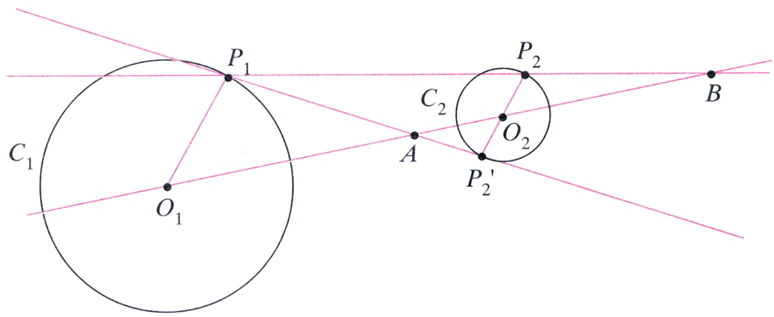
Ryc. 7.101.

Gdy okręgi są niewspółśrodkowe i przystające, to jeden z nich przekształca się na drugi w symetrii środkowej (a więc w jednokładności o stosunku –1) o środku położonym w środku odcinka łączącego środki tych okręgów (ryc. 7.102).

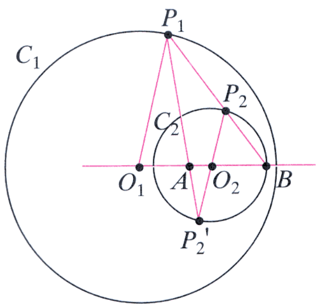


Ryc. 7.102.

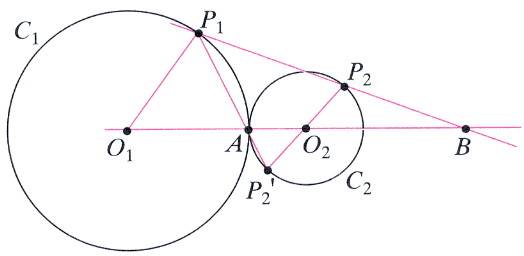
Rozważmy sytuację, gdy okręgi te są niewspółśrodkowe i nieprzystające (ryc. 7.103–107).



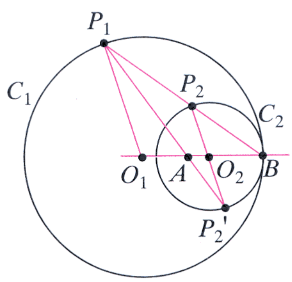
Ryc. 7.103.



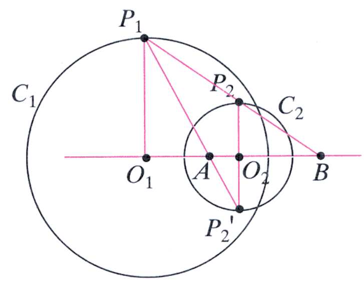
Ryc. 7.104.



Ryc. 7.105.



Ryc. 7.106.



Ryc. 7.107.

Ryciny te ilustrują konstrukcję środków jednokładności dwóch niewspółśrodkowych i nieprzystających okręgów w ich różnych wzajemnych położeniach względem siebie. We wszystkich tych położeniach konstrukcja ta jest następująca:

1. Prowadzimy prostą O_1O_2 (linię środków).
2. Dowolny punkt P_1 okręgu C_1 łączymy z jego środkiem O_1.
3. Przez środek O_2 okręgu C_2 prowadzimy średnicę P_2P_2' równoległą do promienia O_1P_1.
4. Proste P_1P_2' i P_1P_2 przecinają linię środków O_1O_2 tych okręgów odpowiednio w punktach A i B. Punkty te są środkami jednokładności okręgów C_1 i C_2. W jednokładnościach o środkach A i B i stosunkach odpowiednio $-\frac{r_2}{r_1}$ i $\frac{r_2}{r_1}$ okrąg C_1 przekształca się na okrąg C_2. Dowód przeprowadź samodzielnie. ▢

Pytania i zadania

1. Kiedy dwie figury są jednokładne?
2. Omów obrazy figur: odcinka, kąta, wielokąta, okręgu (koła) w jednokładności.
3. Podaj przykłady figur jednokładnych.
4. Narysuj obraz:
   a) trójkąta, b) czworokąta, c) pięciokąta
   w jednokładności o stosunku 2, $-\frac{1}{2}$, 3, -3 i o środku w danym punkcie wewnętrznym każdej z tych figur.
5. Skonstruuj środki jednokładności pary:
   a) odcinków równoległych,
   b) półprostych równoległych,
   c) prostych równoległych,
   d) trójkątów jednokładnych,
   e) czworokątów jednokładnych,
   f) pięciokątów jednokładnych.
6. Dany jest trójkąt ABC i punkt O poza obszarem tego trójkąta. Narysuj obrazy tego trójkąta w jednokładnościach J_O^2 i J_O^{-2}.
7. Dany jest trójkąt ABC. Narysuj trójkąt $A'B'C'$ będący obrazem trójkąta ABC w jednokładności:
   a) $J_A^{\frac{1}{2}}$; b) J_A^{-2}.

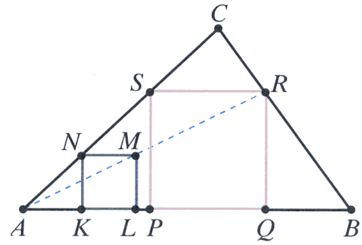
18. Zastosowanie jednokładności w zadaniach

Podamy teraz przykłady zastosowania jednokładności do konstrukcji geometrycznych i zadań na dowodzenie w geometrii.

Przykład 1. W dany trójkąt ABC o kątach ostrych A i B wpisz kwadrat tak, aby dwa jego wierzchołki leżały na boku AB, a pozostałe dwa na bokach BC i CA danego trójkąta.
Rozwiązanie:

Wykonujemy następujące czynności:

1. Budujemy kwadrat $KLMN$, którego wierzchołki K i L leżą na boku AB, a wierzchołek N na boku AC (ryc. 7.108).
2. Prowadzimy półprostą $\overrightarrow{AM}$ do jej przecięcia się z bokiem BC w punkcie R.
3. Kwadrat $KLMN$ przekształcamy przez jednokładność J_A^k, gdzie $k = \frac{AR}{AM}$.



Ryc. 7.108.

W jednokładności tej obrazami punktów K, L, M, N są odpowiednio punkty P, Q, R, S.

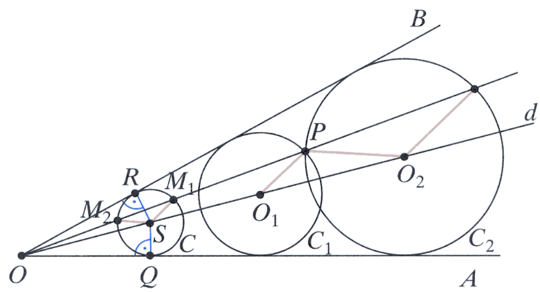
Czworokąt $PQRS$ jest szukanym kwadratem. Istotnie, jednokładność przekształca kwadrat na kwadrat. Punkt R, jednokładny do M, leży na boku BC. Obraz punktu K, czyli punkt P jest, w jednokładności o środku A, współliniowy z A i K, leży więc na prostej AB, po tej stronie punktu A, co punkt K. Oczywiście należy on do boku AB, gdyż kąty A i B są ostre. Podobnie dowodzimy, że punkty Q i S leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Zadanie ma zawsze rozwiązanie i to tylko jedno.

Przykład 2. Dany jest kąt wypukły AOB i punkt P wewnątrz tego kąta. W kąt ten wpisz okrąg przechodzący przez punkt P.

Rozwiązanie:

Wykonujemy następujące czynności:

1. Rysujemy dwusieczną d kąta AOB (ryc. 7.109).
2. Na dwusiecznej d obieramy dowolny punkt S różny od wierzchołka O danego kąta i kreślimy okrąg C o środku S styczny do ramion kąta AOB.
3. Wyznaczamy punkty przecięcia M_1 i M_2 prostej OP z okręgiem C.
4. Z punktu P prowadzimy równoległe do prostych M_1S i M_2S, które przetną dwusieczną d w pewnych punktach O_1 i O_2.
5. Wykreślamy okręgi C_1 i C_2 o środkach O_1 i O_2 i promieniach długości O_1P i O_2P. Są one szukanymi okręgami.



Ryc. 7.109.

Wpisując najpierw okrąg C, sprowadzamy zadanie do konstrukcji obrazu okręgu C w jednokładności o środku O i takim stosunku k, aby obrazem punktu przecięcia okręgu C z prostą OP był punkt P.

Dowód poprawności konstrukcji: niech Q i R będą punktami styczności okręgu C z ramionami OA i OB danego kąta. Obrazem okręgu C w dowolnej jednokładności jest pewien okrąg. Jeśli środkiem jednokładności jest punkt O, to środek O' obrazu okręgu C w tej jednokładności leży oczywiście na prostej OS. Ponieważ odcinki SQ i SR są równe i prostopadłe do ramion OA i OB danego kąta, więc ich obrazami są odcinki równe i prostopadłe do tych ramion. Zatem każdy okrąg będący obrazem okręgu C w jednokładności o środku O jest styczny do ramion danego kąta. Pozostaje wyznaczyć ten spośród nich, który przechodzi przez punkt P.

Prosta OP przecina okrąg C w dwóch punktach: M_1 i M_2, więc zadanie ma dwa rozwiązania. Otrzymamy je, wyznaczając obrazy punktu S w jednokładnościach o środku O i stosunkach $\frac{OP}{OM_1}$ i $\frac{OP}{OM_2}$. Będą one środkami szukanych okręgów. Oznaczając ich środki odpowiednio przez O_1' i O_2', otrzymujemy:

$$\overrightarrow{OO_1'} = \overrightarrow{OS} \cdot \frac{OP}{OM_1} \text{ i } \overrightarrow{OO_2'} = OS \cdot \frac{OP}{OM_2}.$$

Z drugiej zaś strony z konstrukcji, a także na mocy twierdzenia Talesa:

$$\overrightarrow{OO_1} = OS \cdot \frac{OP}{OM_1} \text{ i } \overrightarrow{OO_2} = OS \cdot \frac{OP}{OM_2}.$$

Zatem $O_1' = O_1$ i $O_2' = O_2$.

Otrzymane okręgi nie zależą od wyboru okręgu C. Spróbujcie to uzasadnić samodzielnie.

Przykład 3. Udowodnij, że w każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich na dwa odcinki takie, iż pierwszy o początku w wierzchołku trójkąta jest dwa razy większy niż drugi.
Rozwiązanie:

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, a punkty A', B' i C' – środkami odpowiednio jego boków BC, CA i AB (ryc. 7.110). W jednokładności $J_A^{\frac{1}{2}}$ punkty B i C przekształcają się odpowiednio na punkty C' i B', więc:

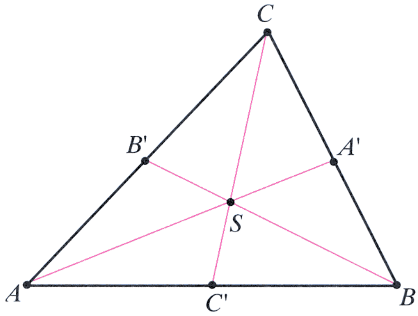
(1) $\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Podobnie, jednokładność $J_B^{\frac{1}{2}}$ przekształca punkty C i A odpowiednio na A' i C', wobec czego otrzymujemy równość:

(2) $\overrightarrow{C'A'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Ponieważ jednokładność $J_C^{\frac{1}{2}}$ przekształca punkty A i B odpowiednio na B' i A', otrzymujemy więc trzecią równość:

(3) $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Ryc. 7.110.

Z równości 1–3 wnosimy, że istnieje jednokładność o stosunku $-\frac{1}{2}$ taka, w której punkty A', B' i C' są obrazami odpowiednio punktów A, B i C. Środek S tej jednokładności leży oczywiście na każdej z prostych AA', BB' i CC', więc proste te przecinają się w jednym punkcie, jest nim środek S jednokładności trójkątów ABC i $A'B'C'$ o stosunku $-\frac{1}{2}$. Wobec tego otrzymujemy:

$\overrightarrow{SA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, skąd wynika, że:

$SA = 2SA'$, $SB = 2SB'$, $SC = 2SC'$, co mieliśmy udowodnić.

Uwaga. Treścią tego przykładu jest **twierdzenie o środkowych w trójkącie**, omówione i udowodnione w klasie pierwszej. Punkt przecięcia się środkowych trójkąta nazywa się **środkiem ciężkości trójkąta**.

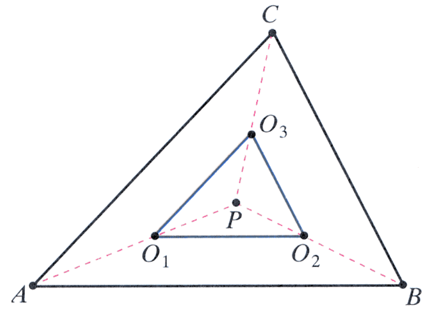
Przykład 4.** Przez punkt O leżący wewnątrz danego trójkąta przechodzą trzy przystające okręgi. Każdy z nich leży wewnątrz trójkąta i jest styczny do dwóch jego boków. Udowodnij, że punkt O, środek okręgu opisanego na tym trójkącie i środek okręgu wpisanego w ten trójkąt leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie:

Niech ABC będzie danym trójkątem, zaś O jego punktem wewnętrznym. Środkami tych okręgów niech będą punkty O_1, O_2, O_3 (ryc. 7.111); leżą one na dwusiecznych odpowiednio kątów BAC, CBA i ACB, co wynika z założenia o styczności tych okręgów do par boków tego trójkąta. A ponieważ okręgi te są przystające (także z założenia), więc:

$O_1O_2 \parallel AB$, $O_2O_3 \parallel BC$ i $O_3O_1 \parallel CA$.

Punkt przecięcia się dwusiecznych AO_1, BO_2 i CO_3 trójkąta ABC oznaczmy przez P. Jest to, jak wiemy, środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy więc:

$$\frac{PO_1}{PA} = \frac{PO_2}{PB} = \frac{PO_3}{PC} = k.$$



Ryc. 7.111.

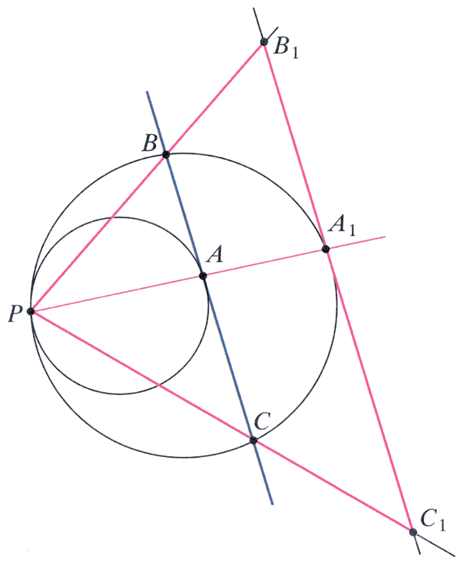
Jednokładność o środku P i stosunku k przekształca trójkąt ABC na trójkąt $O_1O_2O_3$. Punkt O, przez który przechodzą dane trzy przystające okręgi, znajduje się w równej odległości od punktów O_1, O_2, O_3, jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie $O_1O_2O_3$. Wobec tego jest obrazem środka R okręgu opisanego na trójkącie ABC we wspomnianej jednokładności. Stąd wynika, że punkty O, P, R leżą na jednej prostej.

Przykład 5*. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie w punkcie P. Prosta styczna do jednego z nich w punkcie A przecina drugi okrąg w punktach B i C. Udowodnij, że prosta PA zawiera dwusieczną kąta BPC.

Rozwiązanie:

Rozważmy jednokładność o środku P i stosunku równym stosunkowi długości promienia większego okręgu do długości promienia mniejszego (ryc. 7.112).

Jednokładność ta przekształca mniejszy okrąg na większy, a styczną BC do mniejszego okręgu w punkcie A na styczną B_1C_1 do większego okręgu w punkcie A_1. Proste BC i B_1C_1 są równoległe, więc średnica dużego okręgu przechodzącego przez A_1 jest ich wspólną osią symetrii. Symetria względem tej osi przekształca łuk BA_1 na łuk CA_1, skąd wynika równość długości tych łuków. Wobec tego kąty BPA_1 i CPA_1 mają równe miary. Prosta PA zawiera więc dwusieczną kąta BPC, co mieliśmy udowodnić.



Ryc. 7.112.

Pytania i zadania

1. W dany wycinek koła wpisz kwadrat w ten sposób, aby dwa jego wierzchołki należały do łuku okręgu, a pozostałe do promieni koła, które ograniczają ten wycinek.
2. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Trójkąt ten przekształcamy przez jednokładność o środku S i stosunku $k = -\frac{1}{2}$ i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$. Udowodnij, że punkt S jest środkiem ciężkości także trójkąta $A'B'C'$ i że środek okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ jest ortocentrum tego trójkąta.
3. Udowodnij, że rzuty wierzchołków prostokąta na przekątne niezawierające tych wierzchołków są wierzchołkami prostokąta jednokładnego do danego prostokąta.

4. Wpisz kwadrat w dany półokrąg tak, aby jeden bok leżał na średnicy tego półokręgu.
5. Dane są kwadraty *ABCD* i *PQRS*. Przekształć przez jednokładność pierwszy z nich tak, aby otrzymany kwadrat był wpisany w kwadrat *PQRS*.
6*. Na płaszczyźnie dane są trzy nieprzystające okręgi: S_1, S_2 i S_3. Okręgi te leżą jeden na zewnątrz drugiego. Wspólne styczne zewnętrzne okręgów S_1 i S_2 przecinają się w punkcie A, okręgów S_2 i S_3 – w punkcie B, a okręgów S_3 i S_1 – w punkcie C. Udowodnij, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.
7*. Rozstrzygnij, czy każdy prostokąt, który można pokryć 25 kołami o promieniu długości 2, można też pokryć 100 kołami o promieniu długości 1.
8**. Na płaszczyźnie dane są trzy okręgi: S_1, S_2 i S_3. Okręgi S_2 i S_3 są styczne zewnętrznie w punkcie P, okręgi S_3 i S_1 – w punkcie Q, a okręgi S_1 i S_2 – w punkcie R. Prosta PQ przecina okrąg S_1 jeszcze w punkcie U, prosta PR – w punkcie V. Prosta UR przecina okrąg S_2 również w punkcie W, a prosta VQ przecina okrąg S_3 jeszcze w punkcie Z. Udowodnij, że punkt P leży na prostej WZ.
9**. Na płaszczyźnie dane są dwa nieprzystające okręgi: S_1 i S_2, z których jeden leży na zewnątrz drugiego. Wspólne styczne zewnętrzne tych okręgów przecinają się w punkcie A, zaś wspólne styczne wewnętrzne – w punkcie B. Niech P będzie dowolnym punktem okręgu S_1, różnym od punktów styczności. Udowodnij, że istnieje średnica okręgu S_2, której jeden koniec leży na prostej PA, a drugi na prostej PB.

19. Podobieństwo płaszczyzny i jego własności. Podobieństwo figur

Podobieństwem nazywamy każde przekształcenie wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny na siebie, w którym stosunek odległości obrazów dowolnych dwóch punktów do odległości tych punktów jest stały.

Stosunek ten nazywa się **skalą podobieństwa**. Podobieństwo o skali $k > 0$ oznaczać będziemy przez P^k. Jeżeli obrazami punktów A i B są w podobieństwie P^k odpowiednio punkty A' i B', co zapiszemy:

$$P^k(A) = A', P^k(B) = B',$$

to $A'B' = k \cdot AB$.

Z definicji podobieństwa wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Przekształcenie odwrotne do podobieństwa o skali k jest podobieństwem o skali $\frac{1}{k}$:

$$\left(P^k\right)^{-1} = P^{\frac{1}{k}}.$$

Wniosek 2. Złożenie podobieństw o skalach k_1 i k_2 jest podobieństwem o skali $k_1 \cdot k_2$:

$$P^{k_2} P^{k_1} = P^{k_2 k_1} = P^{k_1} P^{k_2}.$$

Z definicji podobieństwa oraz izometrii wynika:

Wniosek 3. Izometria jest podobieństwem o skali równej 1:

$$I = P^1.$$

Kolejny wniosek można wyprowadzić z definicji podobieństwa oraz własności jednokładności:
Wniosek 4. Jednokładność o stosunku k jest podobieństwem o skali $|k|$, przekształcającym odcinki równoległe na odcinki równoległe.

Wnioski 2–4 prowadzą do jeszcze jednego wniosku:
Wniosek 5. Złożenie jednokładności o stosunku k i izometrii jest podobieństwem o skali $|k|$. Istotnie, jednokładność o stosunku k i izometria są podobieństwami o skalach odpowiednio $|k|$ i 1, więc ich złożenie jest podobieństwem o skali $|k| \cdot 1 = |k|$.

Można udowodnić, że zachodzi twierdzenie odwrotne do podanego we wniosku 5.:

Twierdzenie

Każde podobieństwo jest złożeniem pewnej jednokładności i pewnej izometrii.

Z twierdzenia tego wynika, że każde podobieństwo ma wszystkie te własności, które są wspólne dla dowolnej jednokładności i dowolnej izometrii. Wobec tego:
Wniosek 1. Podobieństwo przekształca punkty współliniowe na punkty współliniowe, a kąt – na kąt do niego przystający.
Wniosek 2. Obrazem prostej, półprostej, odcinka, okręgu (koła) w podobieństwie jest odpowiednio prosta, półprosta, odcinek, okrąg (koło). Obrazem wielokąta jest wielokąt o tej samej liczbie boków.

Figury podobne

Figurę F nazywamy podobną do figury G w skali k, gdy istnieje podobieństwo o skali k przekształcające F na G.

Mówimy, że figury F i G są podobne, co zapisujemy: $F \sim G$, gdy jedna z nich jest podobna do drugiej w pewnej skali.

Z definicji tej wynikają następujące wnioski:
Wniosek 1. Każda figura jest podobna w skali 1 do samej siebie i do każdej figury do niej przystającej.
Wniosek 2. Jeżeli figura F jest podobna do figury G w skali k, to figura G jest podobna do figury F w skali $\frac{1}{k}$.
Wniosek 3. Jeżeli figura F jest podobna do figury G w skali k_1, a figura G jest podobna do figury H w skali k_2, to figura F jest podobna do figury H w skali $k_1 \cdot k_2$.

Pytania i zadania

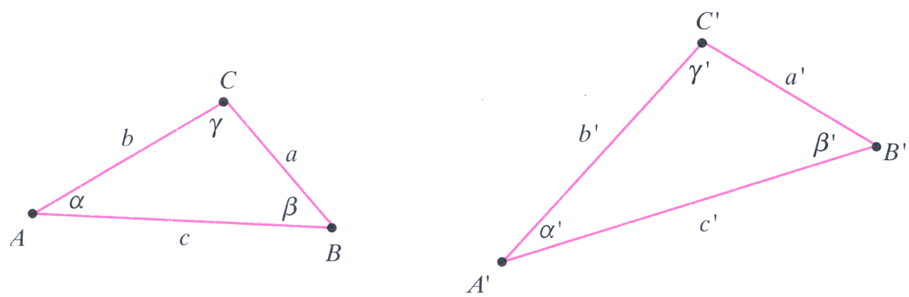
1. Co to jest podobieństwo?
2. Co jest:
   a) przekształceniem odwrotnym do podobieństwa o skali k,
   b) złożeniem podobieństw o skalach k_1 i k_2?
3. Kiedy podobieństwo jest izometrią?
4. Czy jednokładność jest podobieństwem?

5. Jakie własności ma podobieństwo?
6. Co to znaczy, że dwie figury są podobne?
7. Wykaż, że podobieństwem jest złożenie:
   a) dwóch jednokładności,
   b) jednokładności z podobieństwem,
   c) izometrii z podobieństwem.
8. Zbadaj, czy jest podobieństwem przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem punktu $A = (x; y)$ jest punkt $A' = (x'; y')$ taki, że:
   a) $x' = 3x,\ y' = y - 2$; b) $x' = 3x - 1,\ y' = 3y + 5$;
   c) $x' = -2x + 1,\ y' = -2x + 3$; d) $x' = 2x - 1,\ y' = 3y - 2$.
9. Dane są punkty: $A = (1; 3)$, $B = (-1; 2)$, $C = (4; 3)$, $D = (-2; -1)$. Oblicz skalę podobieństwa, w którym obrazami punktów A i B są odpowiednio punkty C i D.
10. Dane są różne punkty: A, B, C, A', B', C' i X takie, że $A'B' = 2AB$, $A'C' = 2AC$, $B'C' = 2BC$. Skonstruuj obraz X' punktu X w podobieństwie, w którym punkty A', B', C' są obrazami odpowiednio punktów A, B, C.
11. Wykaż, że w podobieństwie obrazem:
    a) środka odcinka jest środek obrazu tego odcinka;
    b) prostej jest prosta;
    c) okręgu (koła) jest okrąg (koło);
    d) figury wypukłej jest figura wypukła;
    e) kąta jest kąt do niego przystający;
    f) wielokąta jest wielokąt o tej samej liczbie boków.

12*. Udowodnij, że jeżeli podobieństwo P płaszczyzny nie ma punktów stałych, to złożenie przekształcenia P z sobą, czyli przekształcenie $P \circ P$ także nie ma punktów stałych.

20. Cechy podobieństwa trójkątów

Rozważmy dwa trójkąty: ABC i $A'B'C'$ o bokach długości odpowiednio a, b, c i a', b', c' oraz kątach odpowiednio α, β, γ i α', β', γ' (ryc. 7.113) i załóżmy, że trójkąty te są podobne. Istnieje więc pewne podobieństwo o skali k przekształcające trójkąt ABC na trójkąt



Ryc. 7.113.

$A'B'C'$, w którym obrazami punktów A, B, C są odpowiednio punkty A', B', C'. Zachodzą wówczas równości:

(1) $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ oraz:

(2) $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Powstaje pytanie, czy aby stwierdzić, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, muszą zachodzić wszystkie równości (1) i (2), czy też wystarczy, aby spełnione były tylko niektóre z nich.

Odpowiedź na to pytanie sformułujemy w postaci twierdzeń określających warunki wystarczające, aby dwa trójkąty były podobne. Warunki te nazywamy **cechami podobieństwa trójkątów**.

Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów: BBB

Twierdzenie 1.

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

To znaczy, że jeżeli:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, to trójkąty te są podobne, co zapiszemy:

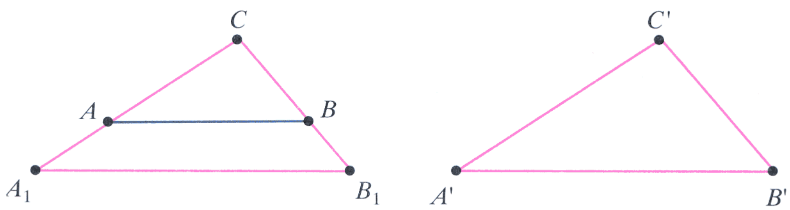
$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

☐ Dowód. Niech:

$$(*)\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Rozważmy jednokładność J_C^k i przekształćmy w niej trójkąt ABC. Niech $A_1 = J_C^k(A)$, $B_1 = J_C^k(B)$. Oczywiście $J_C^k(C) = C$ (ryc. 7.114). Wówczas zachodzą równości: $CA_1 = k \cdot CA$, $CB_1 = k \cdot CB$ i $A_1B_1 = k \cdot AB$, skąd na mocy równości $(*)$ otrzymujemy związki:

$$CA_1 = \frac{C'A'}{CA} \cdot CA = C'A',\ CB_1 = \frac{C'B'}{CB} \cdot CB = C'B' \text{ oraz } A_1B_1 = \frac{A'B'}{AB} \cdot AB = A'B'.$$



Ryc. 7.114.

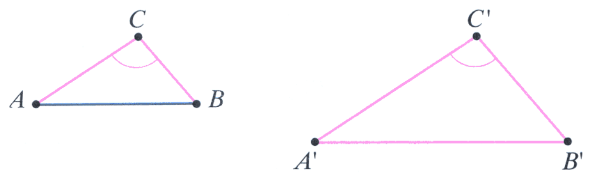
Trójkąty A_1B_1C i $A'B'C'$ mają odpowiednie boki równe, są więc przystające (na mocy cechy przystawania BBB). Istnieje zatem izometria I przekształcająca trójkąt A_1B_1C na trójkąt $A'B'C'$. Wobec tego w złożeniu IJ_C^k (które jest podobieństwem) trójkąt $A'B'C'$ staje się obrazem trójkąta ABC. Są więc one podobne. ☐

Druga cecha podobieństwa trójkątów: BKB

Twierdzenie 2.

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

To znaczy, że jeżeli:
$\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$ i $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$, to $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (ryc. 7.115).



Ryc. 7.115.

☐ Dowód. Wystarczy znowu rozważyć jednokładność J_C^k, gdzie $k = \frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$ (patrz poprzedni dowód) i powołać się na drugą cechę przystawania trójkątów – BKB. ☐

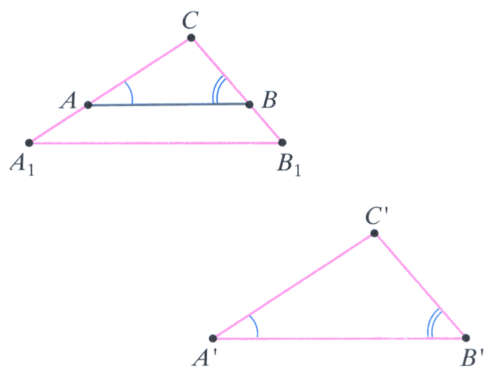
Trzecia cecha podobieństwa trójkątów: KKK

Twierdzenie 3.

Dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają kąty odpowiednio równe.

To znaczy, że jeżeli $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ i $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, to $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. Wystarczy porównać dwa kąty, ponieważ w trójkącie wyznaczają one trzeci (stąd czasem trzecią cechę podobieństwa trójkątów oznacza się przez KK).

☐ Dowód. Rozważmy jednokładność J_C^k, gdzie $k = \frac{A'B'}{AB}$. Przekształci ona trójkąt ABC na trójkąt A_1B_1C przystający (na mocy trzeciej cechy przystawania KBK) do trójkąta $A'B'C'$ (ryc. 7.116). Zatem $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ☐



Ryc. 7.116.

Z twierdzenia tego wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.

Wniosek 2. Dwa trójkąty równoramienne są podobne, jeżeli ich kąty leżące naprzeciw podstaw są równe.

Wniosek 3. Dwa trójkąty prostokątne są podobne, jeżeli mają równy jeden kąt ostry.

Podobieństwo trójkątów możemy sprawdzić również za pomocą tego twierdzenia:

Twierdzenie 4.

Jeżeli boki jednego trójkąta są równoległe do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Dowód tego twierdzenia przeprowadź samodzielnie.

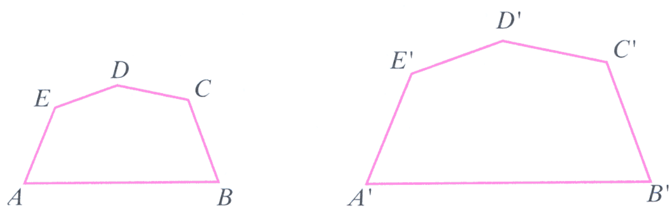
Podobieństwo wielokątów

Wiemy, że jeśli dwa wielokąty są podobne, to mają odpowiadające sobie w tym podobieństwie równe kąty i odpowiednie boki proporcjonalne, na przykład jeśli:

$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ (ryc. 7.117), to:

$(*)\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$ oraz:

$(**)\ \sphericalangle A' = \sphericalangle A, \sphericalangle B' = \sphericalangle B, \sphericalangle C' = \sphericalangle C, \sphericalangle D' = \sphericalangle D, \sphericalangle E' = \sphericalangle E.$



Ryc. 7.117.

Powstaje pytanie, czy jeśli dwa wielokąty spełniają jedną z równości: $(*)$ lub $(**)$, to są podobne. Innymi słowy, czy proporcjonalność boków lub równość parami kątów dwóch wielokątów wystarczą na to, aby te dwa wielokąty były podobne? Nietrudno uzyskać na to pytanie odpowiedź przeczącą, gdyż:

a) na przykład kwadrat i dowolny prostokąt mają kąty równe, lecz nie są figurami podobnymi;

b) kwadrat i dowolny romb mają proporcjonalne boki i też nie są podobne.

Okazuje się, że aby dwa wielokąty były podobne, muszą mieć jednocześnie parami równe wszystkie kąty i wszystkie odpowiednie boki proporcjonalne.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.

Jeżeli dwa wielokąty mają parami równe wszystkie kąty i wszystkie odpowiednie boki proporcjonalne, to wielokąty te są podobne.

Pytania i zadania

1. Wymień cechy podobieństwa trójkątów.
2. Podaj warunki wystarczające do podobieństwa dwóch czworokątów.
3. Trójkąty *ABC* i *KLM* są podobne. Długości boków trójkąta *ABC* wynoszą 6, 8 i 9, a w trójkącie *KLM* najdłuższy bok *KL* ma długość 12. Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta *KLM*.

4. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{2}{3}$. Odpowiadające sobie boki różnią się o 5 cm. Wyznacz długości tych boków.
5. Boki trójkąta ABC wynoszą 10, 9 i 6. Najkrótszy bok podobnego trójkąta $A'B'C'$ ma długość 20. Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta $A'B'C'$.
6. Czworokąt $ABCD$ ma boki o długości 8, 10, 12 i 14. Suma długości najkrótszego i najdłuższego boku czworokąta $A'B'C'D'$ podobnego do czworokąta $ABCD$ jest równa 33. Wyznacz długości boków czworokąta $A'B'C'D'$.
7. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali k. Wyznacz stosunek:
   a) obwodu trójkąta ABC do obwodu trójkąta $A'B'C'$,
   b) długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC do długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$,
   c) pola trójkąta ABC do pola trójkąta $A'B'C'$.
8. Oblicz długości boków i wysokości równoległoboku o obwodzie 72, wiedząc, że stosunek długości jego wysokości wynosi 5:7, zaś stosunek miar jego kątów wewnętrznych jest równy 1:2.
9. Boki trójkąta ABC mają długości: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC, a jego obwód jest równy 60. Wyznacz długości boków trójkąta $A'B'C'$.

10*. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta przy wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D. Udowodnij, że $AC^2 = AD \cdot AB$.

11*. Prosta przechodząca przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ przecina jego przekątną BD w punkcie E, bok BC w punkcie F, a prostą DC w punkcie G. Udowodnij, że $EA^2 = EF \cdot EG$.

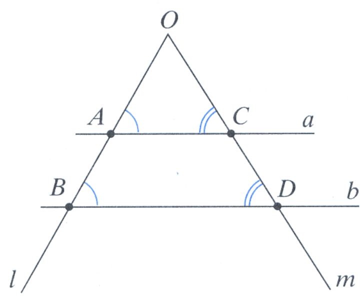
21. Twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem

Powróćmy teraz do twierdzenia Talesa, aby pokazać jego związek z podobieństwem. Udowodnimy to twierdzenie, korzystając z trzeciej cechy podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie (Talesa)

Jeżeli ramiona kąta przecięte są dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków jednego ramienia, których jednym końcem jest wierzchołek kąta, równy jest stosunkowi długości odpowiednich odcinków drugiego ramienia.

☐ Dowód. Niech O będzie wierzchołkiem kąta, półproste l i m jego ramionami, zaś a i b prostymi równoległymi przecinającymi l i m odpowiednio w punktach A, B, C, D (ryc. 7.118). Z równoległości prostych a i b wynika równość kątów OAC i OBD oraz OCA i ODB odpowiednio trójkątów AOC i BOD, a stąd podobieństwo tych trójkątów (na mocy cechy KKK).

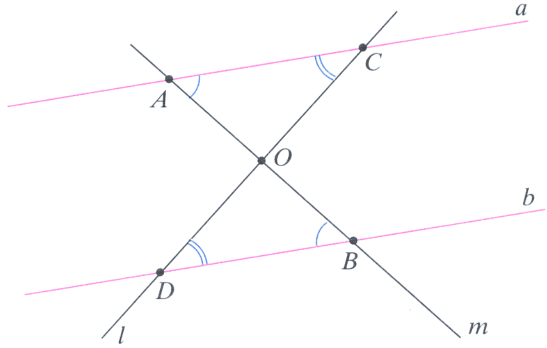


Ryc. 7.118.

Wobec tego zachodzą związki:

$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$, a więc w szczególności dowodzona równość $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. ▢

Podobny sposób dowodzenia można zastosować w następującym przypadku: dane są dwie proste l i m, przecinające się w punkcie O, oraz proste równoległe a i b. Proste l i m przecinają proste a i b odpowiednio w punktach A, B, C i D leżących po obu stronach punktu O (ryc. 7.119). Wówczas $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$.



Ryc. 7.119.

Pytania i zadania

1. Wykaż, że $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \iff \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$ (ryc. 7.118 i 7.119).
2. W trapezie $ABCD$ nierównoległe boki AD i BC przedłużono do przecięcia się w punkcie S. Oblicz SC, jeżeli $CB = 5$, $AD = 4$, $SD = 6$.
3. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki $AD = 3$, $DB = 5$. Długość boku BC wynosi 7. Na jakie części dzieli bok BC symetralna boku AB?
4. W trójkącie ABC bok $AB = 18$. Bok AC podzielono w stosunku 2:3:4 i punkty podziału połączono z bokiem CB odcinkami równoległymi do boku AB. Wyznacz długości tych odcinków.

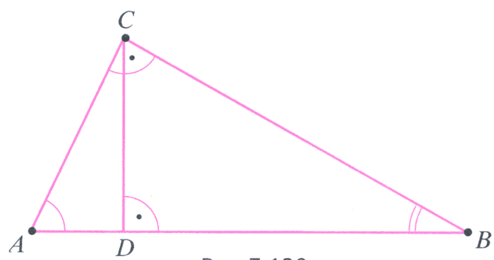
22. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do dowodzenia twierdzeń

Obecnie podamy przykłady zastosowania cech podobieństwa trójkątów w dowodach niektórych twierdzeń.

Przykład 1. Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

▢ Dowód. Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C (ryc. 7.120). Należy dowieść, że $AB^2 = AC^2 + BC^2$. W tym celu poprowadźmy z wierzchołka C wysokość CD. Ponieważ $\sphericalangle CAB$ jest wspólnym kątem ostrym trójkątów prostokątnych ADC i ABC, a $\sphericalangle ABC$ jest wspólnym kątem ostrym trójkątów prostokątnych DBC i ABC, więc $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ i $\Delta DBC \sim \Delta ABC$ (cecha KKK). Stąd wynikają odpowiednio proporcje:



Ryc. 7.120.

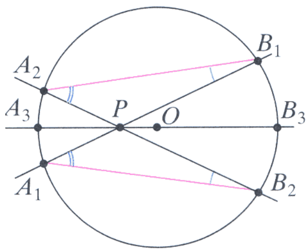
$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ i $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}$, a z nich – równości $AC^2 = AB \cdot AD$ i $BC^2 = AB \cdot DB$, które dodane stronami prowadzą do równości:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB^2. \ ▢$$

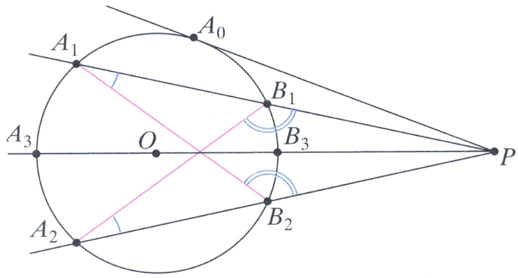
Uwaga. Podany dowód pochodzi od Euklidesa – twórcy geometrii, której uczymy się w szkole.

Przykład 2. Twierdzenie o odcinkach siecznych

Jeżeli dwie sieczne okręgu przecinają się w pewnym punkcie P, to iloczyn odległości punktu P od punktów A_1 i B_1, w których przecina okrąg jedna sieczna, jest równy iloczynowi odległości punktu P od punktów A_2 i B_2, w których przecina ten okrąg druga sieczna (ryc. 7.121 i 7.122): $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$.



Ryc. 7.121.



Ryc. 7.122.

▢ Dowód. Połączmy odcinkami punkty A_1 i B_2 oraz A_2 i B_1. Ponieważ kąty PA_1B_2 i PA_2B_1 oraz PB_1A_2 i PB_2A_1 są równe (dlaczego?), więc trójkąty PA_1B_2 i PA_2B_1 są podobne. Stąd wynika proporcja $\frac{PA_1}{PB_2} = \frac{PA_2}{PB_1}$, a z niej żądana równość $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$. ▢

Uwaga. Twierdzenie, które przed chwilą udowodniliśmy, można również ująć następująco: Iloczyn długości odcinków leżących na siecznej danego okręgu, poprowadzonych od punktu P należącego do tej siecznej do punktów przecięcia tej siecznej z okręgiem, jest wielkością stałą.

Aby wyznaczyć tę stałą, poprowadźmy przez punkt P sieczną przechodzącą przez środek O tego okręgu i przecinającą go w punktach A_3 i B_3 (ryc. 7.121 i 7.122). Wówczas odcinki PA_3 i PB_3 będą miały długości odpowiednio $r - d$ i $r + d$ (ryc. 7.121) lub $d - r$ i $d + r$ (ryc. 1.122), gdzie $d = OP$, zaś r jest długością promienia danego okręgu. Wtedy będzie: $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = PA_3 \cdot PB_3 = |d^2 - r^2|$.

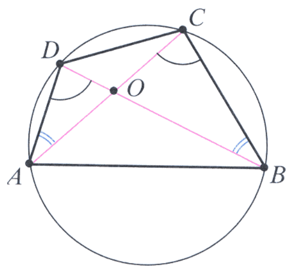
Liczbę $\boldsymbol{d^2 - r^2}$ nazywamy **potęgą punktu względem okręgu**. Liczbie tej równy jest w szczególności kwadrat długości odcinka PA_O stycznej do okręgu poprowadzonej z punktu P poza tym okręgiem (ryc. 7.122).

Twierdzenie o odcinkach siecznych zwane bywa też **twierdzeniem o potędze punktu względem okręgu**.

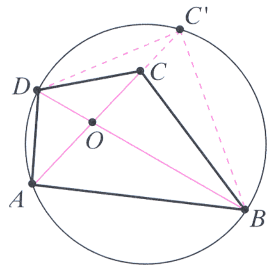
Przykład 3. Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg

Czworokąt wypukły można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyny długości odcinków przekątnych, na które dzieli je ich punkt przecięcia, są równe.

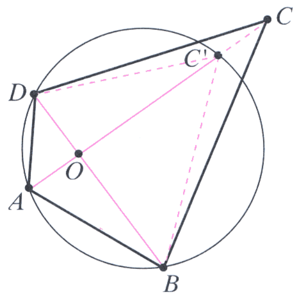
▢ Dowód. Załóżmy, że czworokąt $ABCD$, którego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O, można wpisać w okrąg (ryc. 7.123). Należy dowieść, że $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Ponieważ trójkąty AOD i BOC są podobne (cecha KKK), więc $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$, skąd $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.



Ryc. 7.123.



Ryc. 7.124.



Ryc. 7.125.

Załóżmy teraz, że w czworokącie $ABCD$ zachodzi równość:

$(*)$ $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ i nie wszystkie jego wierzchołki leżą na jednym okręgu (ryc. 7.124 i 7.125). Wtedy, oznaczając przez C' punkt przecięcia półprostej $\overrightarrow{AC}$ z okręgiem przechodzącym przez wierzchołki A, B i D czworokąta $ABCD$, otrzymamy czworokąt $ABC'D$, w którym na mocy udowodnionej części twierdzenia zachodzi równość:

$(**)$ $OA \cdot OC' = OB \cdot OD$.

Z równości $(*)$ i $(**)$ wynika, że $OC = OC'$, a stąd, że C i C' pokrywają się, co przeczy temu, że nie wszystkie wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na jednym okręgu. Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności tezy. ▢

Przykład 4*. Twierdzenie Ptolemeusza

W każdym czworokącie wypukłym $ABCD$ iloczyn długości przekątnych nie przekracza sumy iloczynów długości przeciwległych boków:

$(*)$ $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$,

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

▢ Dowód. Obierzmy wewnątrz czworokąta $ABCD$ taki punkt P, aby $\sphericalangle PAD = \sphericalangle CBD$ i $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BDC$ (ryc. 7.126). Wówczas z podobieństwa trójkątów APD i DBC (cecha KKK) otrzymujemy równości $\frac{AP}{BC} = \frac{AD}{DB}$ oraz $\frac{AD}{DP} = \frac{DB}{DC}$, które są równoważne odpowiednio równościom:

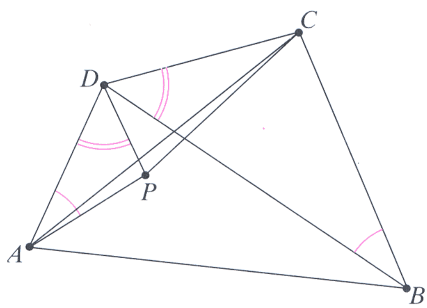
(1) $AP = \dfrac{BC \cdot AD}{DB}$ oraz:

(2) $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DP}{DC}$.

Z równości kątów ADB i PDC oraz proporcji (2) wynika, że trójkąty ABD i PCD są podobne (cecha BKB). Stąd:

(3) $PC = \dfrac{AB \cdot DC}{DB}$.

Ponieważ $AC \leqslant AP + PC$, więc uwzględniając równości (1) i (3), otrzymujemy nierówność $(*)$.



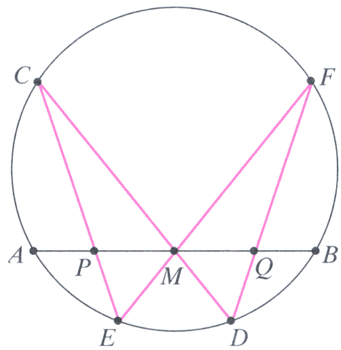
Ryc. 7.126.

Zauważmy teraz, że równość w nierówności Ptolemeusza ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P należy do przekątnej AC. To zaś jest warunkiem koniecznym i wystarczającym równości kątów CAD i CBD, czyli warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby czworokąt $ABCD$ można było wpisać w okrąg.

Tak więc czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$. ▢

Przykład 5*. Twierdzenie o „motylku"

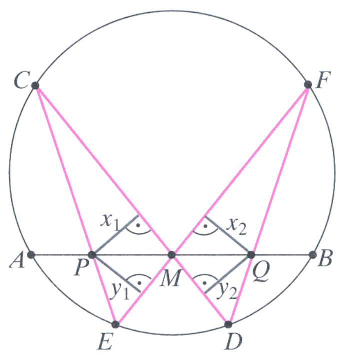
Przez środek M dowolnej cięciwy AB okręgu poprowadźmy jeszcze dwie cięciwy, które przetną ten okrąg w punktach C, D, E, F (ryc. 7.127). Jeśli odcinkami połączymy teraz punkty C i E oraz F i D, otrzymamy figurę $CDEF$, kształtem przypominającą motyla. Oznaczmy ponadto przez P i Q punkty przecięcia cięciwy AB odpowiednio z cięciwami CE i FD. Teraz można podać twierdzenie o „motylku":



Ryc. 7.127.

Skonstruowane w powyższy sposób na prostej AB odcinki PM i MQ mają równe długości albo (co na to samo wychodzi) odcinki AB i PQ mają wspólny środek M.

▢ Dowód. Zrzutujmy prostopadle punkt P na odcinki CM i ME, a punkt Q na odcinki MF i MD (ryc. 7.128). Oznaczmy długości otrzymanych w ten sposób wysokości trójkątów CMP, PME, FMQ i QDM odpowiednio przez x_1, y_1 i x_2, y_2, a równych odcinków AM i BM przez a, zaś odcinków PM i QM odpowiednio przez x i y.



Ryc. 7.128.

Uwaga. W dalszych rozważaniach symbolem ΔS_z oznaczać będziemy trójkąt o wierzchołku S i boku z leżącym naprzeciw tego wierzchołka.

Z podobieństwa trójkątów ΔC_{x_1} i ΔF_{x_2} otrzymujemy proporcję:

$$(1)\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{CP}{FQ},$$

zaś z podobieństwa trójkątów:

ΔE_{y_1} i ΔD_{y_2}, ΔM_{x_1} i ΔM_{y_2} oraz ΔM_{x_2} i ΔM_{y_1} – odpowiednio proporcje:

$$(2)\ \frac{y_1}{y_2} = \frac{PE}{QD},$$

$$(3)\ \frac{x_1}{y_2} = \frac{PM}{QM},\ \text{czyli}\ \frac{x_1}{y_2} = \frac{x}{y},\ \text{oraz:}$$

$$(4)\ \frac{y_1}{x_2} = \frac{PM}{QM},\ \text{czyli}\ \frac{y_1}{x_2} = \frac{x}{y},\ \text{bo}\ PM = x,\ QM = y.$$

Gdy pomnożymy równości (3) i (4) stronami, to otrzymamy:

$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{y_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2}$, a stąd:

(5) $\frac{x^2}{y^2} = \frac{CP \cdot PE}{FQ \cdot QD}$, gdyż $\frac{x_1}{x_2} = \frac{CP}{FQ}$, zaś $\frac{y_1}{y_2} = \frac{PE}{QD}$.

Z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu wynika:

$CP \cdot PE = AP \cdot PB = (AM - PM) \cdot (PM + MB) = (a - x)(a + x)$ oraz:

$FQ \cdot QD = BQ \cdot QA = (BM - QM) \cdot (QM + MA) = (a - y)(a + y)$.

Zatem:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{CP \cdot PE}{FQ \cdot QD} = \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a-y) \cdot (a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2},$$

skąd kolejno otrzymujemy równości:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2},$$

$$x^2(a^2 - y^2) = y^2(a^2 - x^2),$$

$a^2x^2 = a^2y^2$, $x^2 = y^2$ i ostatecznie $x = y$.

Tym samym dowód twierdzenia został zakończony. □

Pytania i zadania

1. Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym długość wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równa jest średniej geometrycznej długości odcinków, na jakie ta wysokość dzieli przeciwprostokątną tego trójkąta.
2. Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z twierdzenia o stosunku pól trójkątów podobnych.
3. W wycinek koła o promieniu długości R wpisano okrąg o promieniu długości r. Cięciwa łącząca końce promieni wycinka ma długość $2a$. Udowodnij, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

4*. Z wierzchołka A kwadratu $ABCD$ zakreślono łuk BD. Rzuty prostokątne dowolnego punktu P tego łuku, różnego od B i D, na przekątną BD oraz boki BC i CD są odpowiednio punktami Q, R i S. Wykaż, że $PQ = \sqrt{PR \cdot PS}$.

5. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Udowodnij, że $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt ten jest trapezem.

6*. Prosta l przecina boki AB i AD równoległoboku $ABCD$ odpowiednio w punktach E i F, a przekątną AC – w punkcie G. Udowodnij, że $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

7*. Dany jest równoległobok $ABCD$, którego dłuższą przekątną jest AC. Punkt C zrzutowano prostopadle na proste AB i AD, otrzymując odpowiednio punkty E i F. Udowodnij, że $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

8**. Dany jest kąt o wierzchołku O i okrąg styczny do jego ramion w punktach A i B. Z punktu A poprowadzono równolegle do OB półprostą przecinającą okrąg w punkcie C. Odcinek OC przecina okrąg w punkcie E, a proste AE i OB przecinają się w punkcie K. Udowodnij, że $OK = KB$.

9**. W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AC < BC$, punkty O, H i P są odpowiednio: środkiem okręgu opisanego, ortocentrum i spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Prosta poprowadzona przez punkt P i prostopadła do prostej OP przecina bok AC w punkcie Q. Udowodnij, że $\sphericalangle PHQ = \sphericalangle BAC$.

Odpowiedzi i wskazówki

Rozdział I.

1.

4. a) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; b) $-3(x-2)^2+32$; c) $4(x-2)^2-20$;
d) $-4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+12\frac{1}{16}$; e) $\sqrt{2}(x-1)^2+2-\sqrt{2}$; f) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$;
g) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{11}{9}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; i) $6(x-16)^2-294$.

5. a) $x_1=-3, x_2=-1$; b) $x_1=-2, x_2=8$; c) $x_1=-3, x_2=1$;
d) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{2}$; e) $x_1=-2, x_2=1$; f) $x_1=-9, x_2=3$.

6. a) Pomnóżmy obie strony tego równania przez 4; otrzymamy równanie $4x^2+4x+44=4y^2$, które jest równoważne kolejno równaniom: $(2x+1)^2+43=(2y)^2$, $(2x+1)^2-(2y)^2=-43$, $(2x+2y+1)(2x-2y+1)=-43$. Ponieważ $-43=-43\cdot 1=43\cdot(-1)=1\cdot(-43)=(-1)\cdot 43$, więc ostatnie równanie jest równoważne układom równań:

$$\begin{cases}2x+2y+1=-43\\2x-2y+1=1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+2y+1=43\\2x-2y+1=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=-43,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=43,\end{cases}$$

a te – odpowiednio układom równań:

$$\begin{cases}x+y=-22\\x-y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=21\\x-y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0\\x-y=-22,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-1\\x-y=21.\end{cases}$$

Rozwiązując je, otrzymujemy pary: $(-11;-11)$, $(10;11)$, $(-11;11)$, $(10;-11)$.

b) Rozumując jak w poprzednim przykładzie, dochodzimy do układów równań:

$$\begin{cases}x+y=-82\\x-y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0\\x-y=-82,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=81\\x-y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-1\\x-y=-81,\end{cases}$$

których rozwiązaniami są pary:

$(-41;-41)$, $(-41;41)$, $(40;41)$, $(-41;40)$.

c) Równanie to jest równoważne kolejno równaniom:

$x^2=(y+1)^2+12$, $x^2-(y+1)^2=12$, $(x+y+1)(x-y-1)=12$.

Ponieważ liczby $x+y+1$ i $x-y-1$ są albo parzyste, albo obie nieparzyste, a ich iloczyn równy jest 12, to obie te liczby są parzyste. Ostatnie równanie jest więc równoważne układom równań:

$$\begin{cases}x+y+1=6\\x-y-1=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y+1=2\\x-y-1=6,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y+1=-6\\x-y-1=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y+1=-2\\x-y-1=-6,\end{cases}$$

a te odpowiednio układom równań:

$$\begin{cases}x=4\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\x=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-4\\y=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-4\\y=1,\end{cases}$$

Rozwiązaniem danego równania są więc pary liczb $(4;1)$, $(4;-3)$, $(-4;-3)$, $(-4;1)$.

7. Przypuśćmy, że gdy liczba x jest całkowita, to liczba $f(x) = ax^2 + bx + c$ też jest całkowita. Wówczas:
1. $f(0) = c$, więc c jest liczbą całkowitą;
2. $f(1) = a + b + c$, stąd $a + b = f(1) - c$, więc $a + b$ jest liczbą całkowitą;
3. $f(2) = 4a + 2b + c$, stąd $2a = f(2) - 2(a + b) - c$, więc $2a$ jest liczbą całkowitą.

Odwrotnie, gdy $2a$, $a + b$ i c są liczbami całkowitymi, to funkcja $ax^2 + bx + c$ ma dla każdego całkowitego x wartość całkowitą. Istotnie:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - ax + ax + bx + c = ax(x-1) + (a+b)x + c =$$

$$= 2a\frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c.$$

Liczba $\frac{x(x-1)}{2}$ jest całkowita, gdyż $x(x-1)$, jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, jest liczbą parzystą. Wartość $ax^2 + bx + c$ równa się zatem sumie trzech liczb całkowitych, więc jest całkowita.

2.

7. a) $y = x^2 + 2x = 4$; b) $y = -2x^2 + 4x - 5$.
8. $a = 2$.
9. Nie.
10. $b = -4$, $c = 1$.
11. $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$.
16. $m = 2$, $n = -1$.
17. $a = 4$, $b = -1$.
18. $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 9$.
19. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

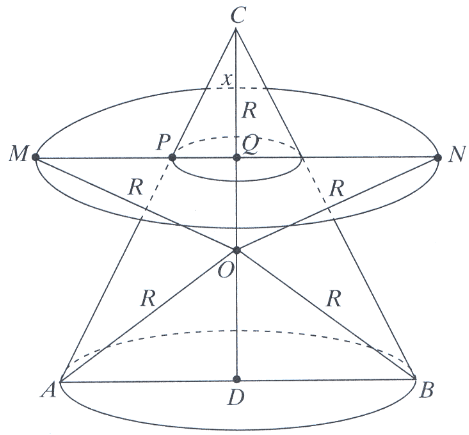
3.

3. a) $\frac{7}{8}$; b) -6; c) $-\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{4}$.
4. a) $-5, -1$; b) $-2, \frac{1}{4}$; c) $-6, 3$; d) $\frac{1}{2}, 13$.
5. $x^2 - 6x + 10$.
6. $-3x^2 + 6x + 9$.
7. $b = -4$, $c = 9$.
8. $\frac{1}{8}$.
9. $\frac{1}{2}$.
10. $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

4.

6. $x = \frac{1}{2}$.
7. Wygodnie jest sporządzić odpowiedni rysunek (ryc. 1, s. 256). Niech O oznacza środek kuli opisanej na danym stożku. Wówczas: $OM = ON = OC = OB = OA = R$, $CQ = x$.

Zatem $OQ = CO - CQ = R - x$. Oczywiście $x \in \left(0; \frac{3}{2}R\right)$. Stąd na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta MOQ mamy $MQ^2 = MO^2 - QO^2$, czyli $MQ^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2$. Zatem pole koła o środku w punkcie Q i promieniu MQ wynosi $\pi\left(2Rx - x^2\right)$. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy $\frac{AD}{PQ} = \frac{CD}{CQ}$, czyli $\frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{PQ} = \frac{\frac{3}{2}R}{x}$. Stąd $PQ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Pole koła o środku w punkcie Q i promieniu PQ wynosi: $\frac{\pi x^2}{3}$.



Ryc. 1.

Zatem pole szukanego pierścienia równe jest $\pi\left(2Rx - x^2\right) - \frac{\pi x^2}{3} = \pi\left(-\frac{4}{3}x^2 + 2Rx\right)$.

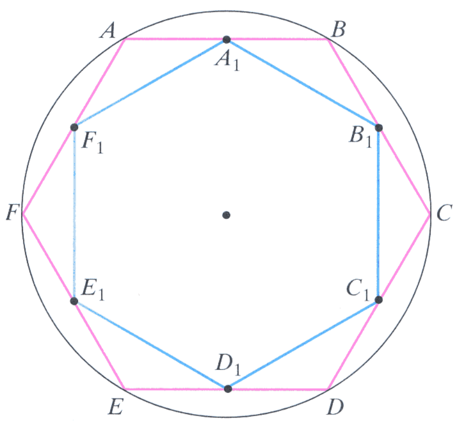
Zadanie sprowadza się więc do znalezienia takiej liczby x z przedziału $\left(0; \frac{3}{2}R\right)$, dla której funkcja $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 2Rx$ osiąga wartość największą.

Ponieważ:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 2Rx = -\frac{4}{3}\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{3}{4}R + \frac{9}{16}R^2\right) + \frac{3}{4}R^2 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{4}R\right)^2 + \frac{3}{4}R^2 \leqslant \frac{3}{4}R^2$$

dla każdego x, przy czym $f(x) = \frac{3}{4}R^2$, gdy $x = \frac{3}{4}R$ i $\frac{3}{4}R \in \left(0, \frac{3}{2}R\right)$, więc szukaną wartością x jest $\frac{3}{4}R$.

8. a) Sporządźmy odpowiedni rysunek (ryc. 2).
Bez trudu zauważymy, że skoro $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = EE_1 = FF_1$ i $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, to $A_1B = B_1C = C_1D = D_1E = E_1F = F_1A$.
Ponieważ:
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F$, więc na mocy wcześniejszych wniosków trójkąty AA_1F_1, A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1, D_1EE_1 i E_1FF_1 są przystające.
Zatem $F_1A_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1$.
Ponadto zauważmy, że:
$\sphericalangle A_1 = 180° - \sphericalangle AA_1F_1 - \sphericalangle BA_1B_1 =$
$= 180° - 60° + \sphericalangle AF_1A_1 - \sphericalangle BA_1B_1 = 120°$.



Ryc. 2.

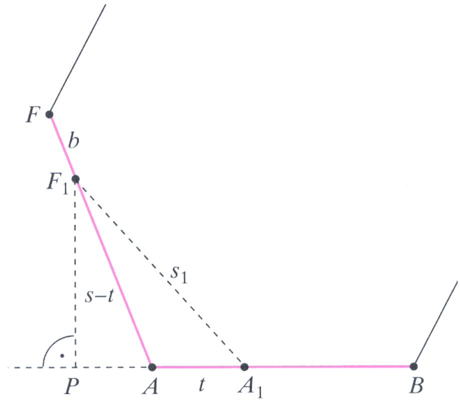
Analogicznie $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_1 = \sphericalangle P_1 = \sphericalangle E_1 = \sphericalangle F_1 = 120°$, co dowodzi foremności sześciokąta $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

b) Oznaczmy przez S_1 bok sześciokąta $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (ryc. 3). Zrzutujmy F_1 prostopadle na prostą AB, otrzymując punkt P. Ponieważ $\sphericalangle F_1AP = 60°$, więc $PA = \frac{s-t}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów A_1PF_1 i APF_1 otrzymujemy:
$s_1^2 = A_1P^2 + F_1P^2 = A_1P^2 + AF_1^2 - AP^2 =$
$= \left(t + \frac{s-t}{2}\right)^2 + (s-t)^2 - \left(\frac{s-t}{2}\right)^2 = t^2 + s^2 - st,$

czyli $s_1^2 = t^2 - st + s^2 = \left(t - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}s^2.$

Wynika stąd, że s_1^2 ma najmniejszą wartość, czyli s_1 jest najkrótszy, gdy $t = \frac{s}{2}$.



Ryc. 3.

5.

7. a) $3(x-2)(x+1)$; b) $\frac{1}{2}(x-1)^2$; c) $-(x-5)(x+4)$;
d) $-3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$; e) $2(x-0{,}25)\cdot(x+0{,}5)$; f) $(x-8)(x+2)$.

8. a) $x^2 - x - 6$; b) $x^2 - 5x + 4$; c) $x^2 + 6x + 9$;
d) $x^2 - 4x$; e) $x^2 - 4x + 2$; f) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1$.

9. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$;
b) $f(x) < 0$ dla $x \in \boldsymbol{R}$;
c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (1; 2)$;
d) $f(x) > 0$ dla $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$;
e) $f(x) < 0$ dla $x \in \boldsymbol{R}$;
f) $f(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

10. Zauważmy, że $f(1) = a + b + c < 0$ i $f(0) = c$. Z faktu, że trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych, wynika, że jest on stałego znaku. Ponieważ $f(1) < 0$, więc i $f(0)' < 0$, ale $f(0) = c$. Stąd $c < 0$.

11. Ponieważ dwa pierwsze trójmiany mają dwa pierwiastki rzeczywiste, to ich wyróżniki Δ_1 i Δ_2 są dodatnie: $4a^2 - 4b^2 = \Delta_1 > 0$, $4b^2 - 4c^2 = \Delta_2 > 0$. Dodając stronami te nierówności, otrzymujemy $4a^2 - 4c^2 > 0$, czyli $4c^2 - 4a^2 < 0$. Stąd wynika, że wyróżnik $\Delta_3 = 4c^2 - 4a^2$ trójmianu $x^2 + 2cx + a^2$ jest ujemny, co oznacza, że trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych.

12. Sposób pierwszy: Wzór funkcji $f(x)$ możemy przepisać równoważnie:
$f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$.
Jest ona zatem funkcją kwadratową o wyróżniku:
$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) =$
$= 2\left[\left(a^2-2ab+b^2\right) + \left(b^2-2bc+c^2\right) + \left(c^2-2ca+a^2\right)\right] =$
$= 2\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right],$
a więc nieujemnym dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c. Wobec tego ma co najmniej jedno miejsce zerowe.
Sposób drugi: Po obliczeniu wartości funkcji $f(x)$ dla $x = a$, $x = b$, $x = c$ otrzymujemy: $f(a) = (a-b)(a-c)$, $f(b) = (b-c)(b-a)$, $f(c) = (c-a)(c-b)$. Jeśli któraś z liczb $f(a)$, $f(b)$ i $f(c)$ jest zerem, to mamy tezę. Załóżmy więc, że żadna z nich nie jest zerem.

Przyjmując, że $a < b < c$, otrzymujemy $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(c) > 0$. Nierówności te dowodzą, że dana funkcja ma w każdym z przedziałów $(a;b)$ i $(b;c)$ pierwiastek rzeczywisty (dlaczego?).

13. Możemy przyjąć, że $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Zatem $a < 4$. Jeśli bowiem byłoby $a \geqslant 4$, wówczas także $b \geqslant 4$ i $c \geqslant 4$. Stąd $a + b + c \geqslant 12$ wbrew założeniu. Wówczas $a^2 < 4a$, ale $4a \leqslant 4b$. Z przechodniości otrzymujemy $a^2 < 4b$, czyli $a^2 - 4b < 0$. Wynika stąd, że wyróżnik pierwszego trójmianu jest ujemny, co dowodzi tezy zadania.

6.

5. $x^2 - 5x + 4$.

6. a) $p = 1, q = -72$; b) $p = 0, q = -2$; c) $p = -2, q = -1$; d) $p = -3\frac{1}{3}, q = 1$.

7. a) 3; b) 15; c) -65; d) $-\frac{3}{16}$; e) -315; f) 255.

8. Ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Wiemy, że $\frac{x_1}{x_2} = \frac{k}{k+1}$.

Zatem $x_1^2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{k}{k+1}$ i $x_2^2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{k+1}{k}$. Ponieważ $x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$, więc:

$$\frac{c}{a}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k} + 2\right) = \frac{b^2}{a^2} \iff \frac{k^2 + k^2 + 2k + 1 + 2k^2 + 2k}{k(k+1)} = \frac{b^2}{ac} \iff$$

$$\iff \frac{(2k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{b^2}{ac} \iff \frac{ac}{b^2} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}.$$

9. Zauważmy, że $x_1 + x_2 = -a$ i $x_1 \cdot x_2 = b + 1$. Stąd:

$$a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 = \left(x_1^2 + 1\right)\left(x_2^2 + 1\right).$$

10. Ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = a$ i $x_1 \cdot x_2 = a$, więc $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$. Wobec tego $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2(x_1 + x_2) \iff x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1 x_2 \iff (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$, czyli nierówność jest prawdziwa.

11. Ze wzorów Viète'a otrzymujemy $x_1 + x_2 = -p$ i $x_1 \cdot x_2 = q$ oraz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -m$ i $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{q}$.

Nierówność, którą mamy udowodnić, przybiera postać:

$$(x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \geqslant 4 \iff 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geqslant 4 \iff \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)^2 \geqslant 0$$

(bo $\frac{x_1}{x_2} > 0$ i $\frac{x_2}{x_1} > 0$). Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

12. Zauważmy, że $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) =$

$$= \left(x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_3 x_2 + x_3^2\right) \cdot \left(x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_4 x_2 + x_4^2\right) = \left(1 + px_3 + x_3^2\right)\left(1 - px_4 + x_4^2\right) =$$

$$= 1 - px_4 + x_4^2 + px_3 - p^2 x_3 x_4 + px_3 x_4^2 + x_3^2 - px_3^2 x_4 + x_3^2 x_4^2 =$$

$$= 2 - px_4 + x_4^2 + px_3 - p^2 + px_4 + x_3^2 - px_3 = 2 + x_3^2 + x_4^2 - p^2 = (x_3 + x_4)^2 - p^2 = q^2 - p^2.$$

13. Zauważmy, że:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right)^2 - 2x_1^2 x_2^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 + 4x_1^2 \cdot x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 \cdot x_2^2 = p^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right) \cdot p^2 + 2 \cdot \frac{1}{4p^4} =$$

$$= p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geqslant 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2\sqrt{2}} + 2 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 + \sqrt{2}.$$

7.

7. a) $x_1=-2,\ x_2=11$; b) $x_1=-6,\ x_2=5$; c) $x_1=3,\ x_2=5$;

d) $x_1=-3,\ x_2=-\frac{1}{3}$; e) $x_1=-\frac{3}{5},\ x_2=3$; f) $x_1=\frac{8}{3},\ x_2=4$.

8. a) $x_1=-3,\ x_2=3$; b) $x_1=0,\ x_2=3$; c) brak rozwiązań;

d) $x_1=-4,\ x_2=4$; e) $x_1=-1,\ x_2=0$; f) $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2}$;

g) $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$; h) $x_1=-\frac{1}{35},\ x_2=0$; i) $x_1=0,\ x_2=1$.

9. a) $x_1=-2,\ x_2=3$; b) $x_1=0,\ x_2=1$; c) $x_1=0,\ x_2=\frac{4}{3}$;

d) $x_1=\frac{2}{3},\ x_2=3$; e) $x_1=-1,\ x_2=9$; f) $x_1=-4,\ x_2=3$.

10. a) $x_1=-9,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=9$; b) $x_1=-\sqrt[3]{4},\ x_2=-1$; c) $x_1=-1,\ x_2=1$;

d) $x_1=-\sqrt{6},\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=\sqrt{6}$; e) $x_1=-2,\ x_1=1$.

11. a) $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; b) $x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{3};+\infty\right)$; c) $x=-2$;

d) $x\in\left\langle-\frac{1}{2};2\right\rangle$; e) $x\in(2;3)$; f) $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

12. a) $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; b) $x\in \boldsymbol{R}$; c) $x\in\left\langle-\frac{1}{2};2\right\rangle$;

d) $x\in\left(-\infty;\frac{12-4\sqrt{5}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{12+4\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;

e) nierówność sprzeczna; f) $x\in(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$.

13. a) $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{2}$; b) $x_1=-2\sqrt{2},\ x_2=0,\ x_3=2\sqrt{2}$;

c) $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2},\ x_3=\sqrt{2},\ x_4=\sqrt{11}$; d) $x_1=-4,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=4$;

e) $x_1=2,\ x_2=3$; f) $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=\frac{4+\sqrt{28}}{2}$.

15. x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, więc zachodzą równości:

(1) $ax_1^2+bx_1+c=0$,

(2) $ax_2^2+bx_2+c=0$.

Mnożymy obie strony równości (1) przez x_1^{m-2}, a równości (2) przez x_2^{m-2}; otrzymujemy wówczas równości $ax_1^m+bx_1^{m-1}+cx_1^{m-2}=0$ i $ax_2^m+bx_2^{m-1}+cx_2^{m-2}=0$, które dodane stronami prowadzą do równości:

$a\left(x_1^m+x_2^m\right)+b\left(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}\right)+c\left(x_1^{m-2}+x_2^{m-2}\right)=0$, czyli równości:

$a\cdot S_m+b\cdot S_{m-1}+c\cdot S_{m-2}=0$, którą mieliśmy udowodnić.

16. Wskazówka: Zauważ, że $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=$
$=-(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(c+a-b)$.

8.

8.1.

1. $m \in \{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\}$.

2. $m \in (1; 2) \cup (2; 3)$.

3. $m \in \left(-1-\sqrt{5}; -3\right) \cup \left(1; -1+\sqrt{5}\right)$.

4. $a = \frac{27}{8}$ lub $a = -\frac{125}{8}$.

5. $m = 3$.

6. $k = \frac{2}{3}$.

7. $m = -1$ lub $m = 2$.

8. $m = 4$.

9. $m = 2$.

10. $k > 1$.

11. Ponieważ pierwsze równanie ma pierwiastki rzeczywiste, więc jego wyróżnik $\Delta_1 = p^2 - 4q \geqslant 0$. Stąd wyróżnik drugiego równania $\Delta_2 = \left(\left(a-\frac{1}{a}\right)p\right)^2 - 4\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 q = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2\left(p^2-4q\right)$ jest także nieujemny, co dowodzi tezy zadania.

12. Rozumujemy przez sprzeczność. Załóżmy, że liczby a_1, a_2, a_3 i b_1, b_2, b_3 spełniają warunek $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 4(b_1+b_2+b_3)$ i żadne z równań nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wówczas $a_1^2 - 4b_1 < 0$, $a_2^2 - 4b_2 < 0$, $a_3^2 - 4b_3 < 0$. Sumując te nierówności stronami, otrzymujemy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 4(b_1+b_2+b_3)$.
Ponieważ $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \leqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, więc $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 < 4(b_1+b_2+b_3)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

13. Rozumujemy przez sprzeczność. Załóżmy, że żadne z równań nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wówczas $4b^2 - 4ac < 0$, $4c^2 - 4ab < 0$, $4a^2 - 4bc < 0$. Sumując stronami te nierówności, otrzymujemy nierówność $4b^2 + 4c^2 + 4a^2 - 4ac - 4ab - 4bc < 0$, czyli nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca$, która jest oczywiście fałszywa. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

14. $a = 0$ lub $a = 4$.

15. $m = 0$.

16. Skoro pierwsze równanie ma pierwiastki rzeczywiste, to $b^2 \geqslant 4ac$. Stąd $b^6 \geqslant 64a^3c^3$. Jeśli $ac \geqslant 0$, to oczywiście $64a^3c^3 \geqslant 4a^3c^3$, więc $b^6 \geqslant 4a^3c^3$. Gdy zaś $ac < 0$, to także $b^6 > 4a^3c^3$, bo $b^6 \geqslant 0$, zaś $4a^3c^3 < 0$. W obu przypadkach otrzymaliśmy nierówność $b^6 \geqslant 4a^3c^3$, która dowodzi tezy zadania.

17. Przypuśćmy, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Wtedy prawdziwa jest równość $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Ale ponieważ a, b, c są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to $a = 2k+1$, $b = 2l+1$, $x = 2m+1$, gdzie $k, l, m \in C$. Wobec tego prawdziwa jest równość $(2k+1)p^2 + (2l+1)pq + (2m+1)q^2 = 0$, czyli równość $2\left(kp^2 + lpq + mq^2\right) + \left(p^2 + pq + q^2\right) = 0$. Wynika stąd, że liczba $p^2 + pq + q^2$ jest podzielna przez 2. To zaś jest niemożliwe, gdyż p i q są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Tak więc mogą zajść tylko dwa przypadki:
– liczby p i q są nieparzyste,
– jedna z liczb p i q jest parzysta, a druga nieparzysta.

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach liczba $p^2 + pq + q^2$ jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości podanego twierdzenia.

8.2.

2. $m \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; +\infty)$.

3. $k \geqslant 3$.

4. $m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

5. $m \in \langle 1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{2}\rangle \cup \langle 1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{5}\rangle$.

6. **Sposób pierwszy:** Wykażemy, że podany trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych. Załóżmy więc, że ma on pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2. Nie mogą być one równe, gdyż w przeciwnym razie musiałyby być tą samą liczbą całkowitą, co wynika ze wzorów Viète'a: $2x_1 = -p$, $x_1^2 = q$ i z tego, że liczby p i q są całkowite. Niech zatem $x_1 < x_2$. Wtedy x_1 i x_2 nie są liczbami całkowitymi i w przedziale $(x_1; x_2)$ nie ma liczb całkowitych, gdyż w przedziale tym trójmian $x^2 + px + q$ jest stale ujemny.
Wobec tego zachodzą równości: $x_1 = n + \alpha$ i $x_2 = n + \beta$, gdzie $n \in C$ i $\alpha, \beta \in (0; 1)$. Wtedy z twierdzenia Viète'a otrzymujemy równość $-p = x_1 + x_2$, z której wynika, że liczba $\alpha + \beta = -p - 2n$ jest liczbą całkowitą. A ponieważ $0 < \alpha + \beta < 2$, więc $\alpha + \beta = 1$.
Z tego samego twierdzenia wynika, że $x_1 \cdot x_2 = q$, czyli że $x_1 \cdot x_2$ jest liczbą całkowitą. Ponadto $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (n + \alpha)(n + \beta) = n^2 + (\alpha + \beta)n + \alpha \cdot \beta = n^2 + n + \alpha\beta$, skąd wynika, że $n^2 + n < x_1 x_2 < n^2 + n + 1$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że trójmian ten nie może mieć pierwiastków rzeczywistych, co kończy dowód tezy zadania.

Sposób drugi: Ponieważ $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}$, więc trójmian ten w punkcie $x_0 = -\frac{p}{2}$ osiąga wartość najmniejszą. Wykażemy, że $x_0 \in C$ i dowód tezy zadania będzie zakończony.
Załóżmy więc, że $x_0 \notin C$. Wtedy w punkcie tym trójmian osiąga wartość ujemną.
Wobec tego ma on pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ i $x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.
Ale $p^2 - 4q > 0$ jest liczbą całkowitą, więc $p^2 - 4q \geqslant 1$, skąd $x_1 \leqslant \frac{-p-1}{2}$ i $x_2 \geqslant \frac{-p+1}{2}$.
Oczywiście liczby $\frac{-p-1}{2}$ i $\frac{-p+1}{2}$ są całkowite (dlaczego?) i należą do przedziału $\langle x_1; x_2\rangle$, gdzie trójmian ten ma wartości niedodatnie, a przecież dla każdej liczby całkowitej przyjmuje on (z założenia) wartość dodatnią. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód tezy zadania.

9.

1. 8.

2. Około 72 m.

3. Ośmiokąt.

4. 9, 11, 13.

5. 30 stóp.

6. 50.

7. 20 rzędów po 16 krzeseł.

8. 6 i 8.

9. 9 i 12.

10. 2 m; 3,5 m.

11. Sporządźmy odpowiedni rysunek (ryc. 4).

Niech: $AD = x$, $RO = k$, $NO = h$, $DC = a$ i $CD > AD$. Wówczas $DQ = a$.

Ponieważ $S_{DQO} = S_{AQOM}$ oraz $S_{AMD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$, więc $S_{DQO} = S_{AQOM} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{8} ax$. Ale $S_{DQO} = \frac{1}{2} DQ \cdot RO = \frac{1}{2} a \cdot k$, więc $\frac{ak}{2} = \frac{ax}{8} \iff k = \frac{x}{4}$. Z faktu, że $RO \parallel DC$ otrzymujemy, że $\sphericalangle ROQ = 45°$. Zatem $RO = RQ = k = \frac{x}{4}$, czyli $h = RQ + QA = \frac{x}{4} + x - a = \frac{5}{4} x - a$.

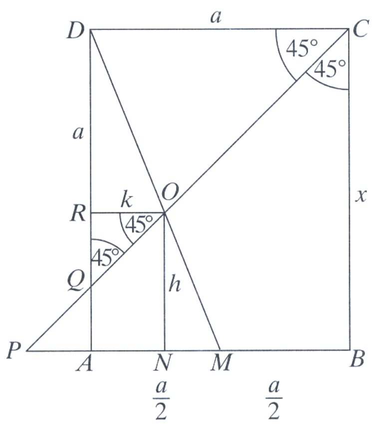
Skoro $S_{AQOM} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$, czyli $S_{POM} - S_{PQA} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$,

więc $\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{5}{4} x - a\right) - (x - a)^2 = \frac{1}{4} xa \iff$

$\iff \frac{5}{4} x^2 - xa - \frac{5}{8} ax + \frac{a^2}{2} - x^2 + 2ax - a^2 = \frac{1}{4} ax \iff$

$\iff 10x^2 - 8xa - 5ax + 4a^2 - 8x^2 + 16ax - 8a^2 - 2ax = 0 \iff 2x^2 + xa - 4a^2 = 0.$

Ponieważ $\Delta = a^2 + 32a^2 = 33a^2$, więc dane równanie ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-a - a\sqrt{33}}{4}$ i $x_2 = \frac{-a + a\sqrt{33}}{4}$. Pierwiastek x_1 nie może być długością boku, bo $x_1 < 0$. Zatem $x = \frac{-a + a\sqrt{33}}{4}$. W zadaniu mamy $a = 4$, dlatego $x = \frac{-4 + 4\sqrt{33}}{4} = \sqrt{33} - 1$.



Ryc. 4.

12. $a < -1$ lub $a > 3$. Wskazówka: Należy znaleźć te wartości a, dla których układ:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leqslant 2 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań.

Rozdział II.

1.

8. $x = 11$, więc $x + 1 = 12$ i wówczas:

$P(x) = x^{17} - (x+1)x^{16} + (x+1)x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} -$
$-(x+1)x^{12} + \ldots - (x+1)x^2 + (x+1)x - 1 =$
$= x^{17} - x^{17} - x^{16} + x^{16} + x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + \ldots - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1.$

Stąd $P(11) = 10$.

10. $b = \frac{3}{2}, c = -\frac{3}{2}$.
11. $a = 11, b = -6$.
12. $a = -3, b = 2, c = 4$.
13. a) $a = 2, b = -5, c = 11$;
b) $a = 4, b = -12, c = 5$;
c) $a = 0, b = 1, c = 2$.
14. Według założenia liczby $f(0) = d$ i $f(1) = a + b + c + d$ są nieparzyste. Wykażemy, że $f(x)$ jest wówczas dla każdego całkowitego x liczbą nieparzystą. Istotnie, jeśli x jest liczbą parzystą, to $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ jest sumą liczb parzystych ax^3, bx^2, cx i liczby nieparzystej d. Jeśli zaś x jest liczbą nieparzystą, to $f(x) = a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) + (a + b + c + d)$ jest sumą liczb parzystych $a(x^3 - 1)$, $b(x^2 - 1)$, $c(x - 1)$ i liczby nieparzystej $a + b + c + d$. W obu przypadkach $f(x) \neq 0$, dla każdej liczby całkowitej x.
15. Zauważ, że:
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 6a\frac{x^3 - x}{6} + 2b\frac{x^2 - x}{2} + (a + b + c)x + d.$$

2.

6. a) $a = 6, b = -17, c = 12$;
b) $a = 2, b = 0, c = 3$.
7. $2^{n+1} - 1$.
8. Przy x^{10} współczynnik wielomianu wynosi 1, a przy x^9 jest równy 55.
9. $P(x) = 9x^2 - 26x - 21, Q(x) = -9x^3 + 44x^2 - 39x - 7$.
10. Oczywiście $7|f(0)$, $7|f(1)$, $7|f(-1)$, $7|f(2)$ i $7|f(-2)$. Zatem $7|e$, $7|a + b + c + d$, $7|a - b + c - d$, $7|16a + 8b + 4c + 2d$ i $7|16a - 8b + 4c - 2d$. Stąd $7|e$, $7|a + c$ i $7|b + d$. Jednocześnie $7|4(a + c) + 2(b + d) + 12a + 6b$ i $7|4(a + c) - 2(b + d) + 12a - 6b$. Ponieważ $7|a + c$ i $7|b + d$, więc $7|2a + b$ i $7|2a - b$. Z dwóch ostatnich podzielności wynika, że $7|4a$ i $7|2b$, zatem $7|a$ i $7|b$. Z podzielności $7|a + c$ i $7|b + d$ wynika, że $7|c$ i $7|d$. Wcześniej wykazaliśmy, że $7|e$. Istotnie więc, wszystkie współczynniki tego wielomianu są podzielne przez 7.
11. Suma współczynników wielomianu:
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest równa $W(1)$. W naszym przypadku:
$W(1) = 3 \cdot (1^3 - 3 \cdot 1 + 3)^{2002} - 4(1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4)^{2003} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 7$.
12. $a = -8, b = 18$ lub $a = 8, b = 14$.

3.

3. a) $I(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3, R(x) \equiv 0$; b) $I(x) = x - 1, R(x) \equiv 0$; c) $I(x) = x^2 + 2x - 15$, $R(x) \equiv 0$; d) $I(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, R(x) \equiv 0$; e) $I(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$, $R(x) = -30x + 35$; f) $I(x) = x^2 + 5x + 7, R(x) = 6x^2 - 21x - 20$.
4. $P(x) = x^2 + x, Q(x) = x + 3$.
5. Nie, na przykład $f(x) = x - 1, g(x) = x - 3, h(x) = x^2 - 4x + 3$.
6. $a = 4, b = -2$.
7. Z warunków zadania wynika, że istnieje taki wielomian $H(x)$, iż:
$W(x) = P(x) \cdot H(x) + R(x) \Longleftrightarrow W(x) = (x^4 + x^3 - x - 1) \cdot H(x) + (x^3 + x^2 + x + 1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\ W(x)=\left(x\left(x^3-1\right)+\left(x^3-1\right)\right)\cdot H(x)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\ \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow\ W(x)=\left(x^3-1\right)(x+1)\cdot H(x)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\ \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow\ W(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)\cdot H(x)+\left(x^3+x^2+x+1\right).$

Według ostatniej równości znalezienie reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $Q(x)$ sprowadza się do znalezienia reszty z dzielenia x^3+x^2+x+1 przez x^2-1. Zauważmy, że $x^3+x^2+x+1=\left(x^2+1\right)(x+1)$. Należy zatem znaleźć resztę z dzielenia x^2+1 przez $x-1$. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy, że reszta wynosi 2.

8. $a=-1, b=10.$

9. $a=3, b=5.$

10. $a=3, b=-4.$

11. Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o dzieleniu z resztą i z twierdzenia o równości wielomianów.

12. Niech $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Wówczas $f(x)-f(a)=$
$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-a_na^n-a_{n-1}a^{n-1}-\ldots-a_1a-a_0=$
$=a_n\left(x^n-a^n\right)+a_{n-1}\left(x^{n-1}-a^{n-1}\right)+\ldots+a_1(x-a).$
Zauważmy, że $x^k-a^k==(x-a)\left(x^{k-1}+x^{k-2}a+x^{k-3}a^2+\ldots+xa^{k-2}+a^{k-1}\right)$ dla $k\in N$. Zatem $x-a\left|x^k-a^k\right.$. Stąd wynika teza zadania.

13. Jeżeli $p_1=q\cdot u_1+r_1$ i $p_2=q\cdot u_2+r_2$, przy czym st $(r_i)<$ st q $(i=1,2)$, to $p_1+p_2=$ $=q(u_1+u_2)+r_1+r_2$ i st $(r_1+r_2)<\max(\text{st}(r_1), \text{st}(r_2))<q$, czyli r_1+r_2 jest resztą z dzielenia p_1+p_2 przez q. Podobnie $p_1p_2=(qu_1+r_1)(qu_2+r_2)=q(qu_1u_2+u_1r_2+u_2r_1)+r_1r_2$ i gdy $r_1r_2=qu+r$, to $p_1q_1=q(qu_1u_2+u_1r_2+u_2r_1+u)+r$.

4.

3. a) $I(x)=3x^2+7x+22, R(x)=61;$
b) $I(x)=4x^4-4x^3+7x^2-7x+5, R(x)=-4;$
c) $I(x)=x^2-4x+3, R(x)=0;$
d) $I(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^2-2\frac{17}{18}x+\frac{89}{54}, R(x)=-\frac{413}{162}.$

4. $m=-3.$

5. $R(x)=-x+2.$

6. $a=-6$ lub $a=1.$

7. $f(x)$ – tak, $g(x)$ – nie.

8. Niech $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Z wniosku z twierdzenia Bézouta:
$x-1|f(x)\ \Longleftrightarrow\ f(1)=0\ \Longleftrightarrow\ a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0=0$ oraz
$x+1|f(x)\ \Longleftrightarrow\ f(-1)=0\ \Longleftrightarrow\ a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\ldots+a_1(-1)+q_0=0.$
Załóżmy, że n jest liczbą parzystą (dowód dla n nieparzystego przebiega analogicznie). Wówczas $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\ldots-a_1+a_0=0$. Stąd:
$a_n+a_{n-2}+a_{n-4}+\ldots+a_2+a_0=a_{n-1}+a_{n-3}+\ldots+a_1.$

9. Z warunków zadania wynika, że istnieje taki wielomian $Q(x)$, iż $W(x)=P(x)\cdot Q(x)+R(x)$, czyli $W(x)=\left(x^3-3x+2\right)\cdot Q(x)+\left(3x^2-2x+1\right)\Longleftrightarrow$ $W(x)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)Q(x)+\left(3x^2-2x+1\right)$. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia reszty z dzielenia wielomianu $3x^2-2x+1$ przez $x-1$. Z twierdzenia Bézouta otrzymujemy, że reszta ta wynosi $f(1)$, czyli 2.

5.

4. $m = n = 1$.
5. $m = -1, n = 1$.
6. $a = -7, b = 2$.
7. Niech x_0 i x_1 będą pierwiastkami danego równania, przy czym x_0 – pierwiastkiem podwójnym. Z twierdzenia Viète'a mamy równości: $2x_0 + x_1 = 0$, $x_0^2 + 2x_0 x_1 = a$, $x_0^2 x_1 = -b$; podstawiając wyznaczone x_1 z pierwszej równości do kolejnych dwóch, otrzymamy związki: $x_0^2 + 2x_0(-2x_0) = a$ i $x_0^2(-2x_0) = -b$, czyli równości $-3x_0^2 = a$, $2x_0^3 = b$. Stąd:
$4a^3 + 27b^2 = 4 \cdot \left(-3x_0^2\right)^3 + 27\left(2x_0^3\right)^2 = -4 \cdot 27x_0^6 + 27 \cdot 4x_0^6 = 0.$

6.

3. Na podstawie wzorów Viète'a mamy:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 11 \\ x_1 x_2 x_3 = 6. \end{cases}$$
Poszukiwane równanie zapiszmy w postaci $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Z warunków zadania oraz wzorów Viète'a wynika:
$-a = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 11,$
$b = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 36,$
$-c = x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 36$, skąd $a = -11$, $b = 36$, $c = -36$. Zatem szukanym równaniem jest $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$.
Dla sprawdzenia zauważmy, że pierwiastkami danego równania są $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, zaś pierwiastkami szukanego równania liczby 2, 3, 6.

4. Ze wzorów Viète'a mamy:
$-a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$.
Wobec tego:
$$a^2 \geqslant 3b^2 \iff (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geqslant 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \iff$$
$$\iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 \geqslant 0 \iff (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geqslant 0.$$

5. $m = -5$, $n = 30$, $x_3 = -\frac{5}{2}$.

6. Załóżmy, że pierwiastkami danego wielomianu są liczby $x_1, -x_1, x_2$. Wówczas ze wzorów Viète'a otrzymujemy równości:
$$\begin{cases} x_1 - x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ -x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ -x_1^2 x_2 = -\frac{d}{a}, \end{cases}$$
a stąd równości $x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1^2 = -\frac{c}{a}$, $x_1^2 x_2 = \frac{d}{a}$.
Z drugiej i trzeciej równości otrzymujemy związek $x_2 = -\frac{d}{c}$. Zatem $x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_2 = -\frac{d}{c}$, skąd $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ i ostatecznie $bc = ad$.

7. Ze wzorów Viète'a mamy:

$x_1+x_2+x_3=1,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{b}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a}$. Zatem:

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\cdot\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=1\cdot\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)^{-1}=-1.$$

8. $a=b=2$.

9. Niech $x_1=x_2=x_3=1$, x_4 będą pierwiastkami danego wielomianu. Wówczas $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ (ze wzorów Viète'a), skąd $x_4=2$. Zatem na mocy wzorów Viète'a mamy:

$-a=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot2=7,$

$b=x_1x_2x_3x_4=1\cdot1\cdot1\cdot2=2.$

Skąd $a=-7$, $b=2$.

10. Niech liczby dodatnie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 będą pierwiastkami danego wielomianu. Wówczas na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy równości $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ i $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=32$, a stąd – równości $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=2=\sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5}$. Równość średnich: arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich pociąga za sobą równość tych liczb. Wobec tego $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=2$. Dany wielomian jest więc postaci $(x-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$. Zatem $a=40$, $b=-80$, $c=80$.

7.

2. a) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$;
b) $x_1=-7, x_2=-2, x_3=2, x_4=3$;
c) $x_1=-3, x_2=-2, x_3=x_4=2, x_5=3$;
d) $x=\frac{1}{2}$;
e) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=1$;
f) $x_1=x_2=-\frac{1}{3}, x_3=1, x_4=5$;
g) $x=\frac{1}{2}$;
h) $x_1=x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}$.

3. Wskazówka: Rozważ wielomian unormowany o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest dana liczba, na przykład:
a) x^2-2; b) x^2-6; c) x^2-2x-1; d) x^4-24x^2+64; e) x^4-4x^2+1.

4. Rozumujmy przez sprzeczność. Załóżmy, że wielomian f o współczynnikach całkowitych, przyjmujący dla liczb całkowitych k i $k+1$ wartości nieparzyste, ma pierwiastek całkowity x_0. Wtedy na mocy twierdzenia Bézouta możemy zapisać: $f(x)=(x-x_0)\cdot g(x)$, gdzie g jest pewnym wielomianem także o współczynnikach całkowitych. Ponieważ liczby $f(k)$ i $f(k+1)$ są z założenia nieparzyste, więc także liczby $k-x_0$ i $k+1-x_0$ muszą być nieparzyste, co oczywiście jest niemożliwe, gdyż są one kolejnymi liczbami całkowitymi. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

5. Niech x_1, x_2, x_3 będą trzema różnymi liczbami całkowitymi, dla których wielomian f o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1. Są one więc pierwiastkami wielo-

mianu $g(x)=f(x)-1$. Zatem $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot h(x)$, gdzie h jest pewnym wielomianem o współczynnikach całkowitych. Gdyby wielomian f miał pierwiastek całkowity x_0, wtedy byłoby $f(x_0)=0$, a co za tym idzie:
$-1=(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdot h(x_0)$.
Ostatnia równość zachodzić nie może, gdyż oznaczałaby możliwość przedstawienia liczby -1 w postaci iloczynu czterech liczb całkowitych, wśród których co najmniej trzy są różne. Wielomian f nie może zatem mieć pierwiastka całkowitego.

8.

3. a) $(x-1)(x-2)(x+2)$; b) $2x(x+3)(x-2)$;
c) $3(t-3)(t+3)(2t-5)$; d) $(x+3)(x-3)^3$;
e) $-3y(y+1)(y-1)^2(y^2+y+1)$; f) $5(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)^2$.

4. a) $(x^2+1)(3x-2)$; b) $(t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+t+1)$;
c) $(2y-1)(\sqrt[3]{2}\,y-1)(\sqrt[3]{4}\,y^2+\sqrt[3]{2}\,y+1)$; d) $(2x-1)(x^2+2)$;
e) $(x+\sqrt{3})(5x-2)(x-\sqrt{3})$; f) $(x-3)(x+1)(x+2)$.

5. a) $4(2x+5)^2(x-3)(x-2)$; b) $-2(x-2)(3x+4)$;
c) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$; d) $x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;
e) $x^2(x-2)(x-3)$; f) $(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$.

6. a) $(x-1)(x+5)(2x+1)$; b) $(y-3)(y-1)(y+1)(y+2)$;
c) $(t-2)(t-3)(3t+1)$; d) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$;
e) $(t-1)(t+2)(t^2+t+1)(t^2+2t+4)$; f) $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+2)$.

7. a) Zauważmy, że: $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2=$
$=(x^2+1-\sqrt{2}\,x)(x^2+1+\sqrt{2}\,x)=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$;
b) $x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+1-x^2)(x^4+1+x^2)=$
$=(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)=(x^2-\sqrt{3}\,x+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;
c) $x^9-1=(x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=$
$=(x-1)(x^6(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)+x^2+x+1)=$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$.

8. Zobacz przykład 2 z podrozdziału 5.

9. Niech $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$. Po podstawieniu po obu stronach równania $x=-b$ otrzymujemy: $(-b-a)(-b-10)+1=(-b+b)(-b+c)=0$. Stąd wynika równanie $(b+a)(b+10)=-1$. Ponieważ a i b są liczbami całkowitymi, więc $b+a$ i $b+10$ także są liczbami całkowitymi. Liczba -1 może być przedstawiona w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych tylko w jeden sposób $-1=(+1)(-1)$. Mogą więc być tylko dwie możliwości:
1. $b+10=1$, $b=-9$, $b+a=-1$, stąd $a=8$;
2. $b+10=-1$, $b=-11$, $b+1=1$, stąd $a=12$.
W obu przypadkach otrzymujemy:
$(x-8)(x-10)+1=(x-9)^2$, $(x-12)(x-10)+1=(x-11)^2$.

10. Załóżmy, że $(x-1)(x-2)(x-3)-1=p(x)\cdot q(x)$, gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych. Suma stopni wielomianów $p(x)$ i $q(x)$ jest równa 3. Można założyć, że w obu tych wielomianach współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1 (inną możliwością jest tylko -1). Po podstawieniu do powyższego równania wartości $x=1$, $x=2$, $x=3$ i ze względu na to, że liczba -1 rozkłada się na dwa czynniki całkowite tylko w jeden sposób: $-1=(+1)\cdot(-1)$, otrzymujemy, że przy każdej z rozpatrywanych wartości x zachodzi $p(x)=1$ i $q(x)=-1$ lub $p(x)=-1$ i $q(x)=1$. W każdym przypadku widzimy, że suma $p(x)+q(x)$ jest równa 0 dla $x=1$, $x=2$, $x=3$. Wynika stąd, że wielomian $p(x)+q(x)$ dzieli się przez wielomian $(x-1)(x-2)(x-3)$. Stopień wielomianu $p(x)+q(x)$ jest oczywiście mniejszy od 3. Dlatego $p(x)+q(x)$ nie może się dzielić przez wielomian $(x-1)(x-2)(x-3)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rozkład na czynniki, którego istnienie założyliśmy na początku rozumowania, jest niemożliwy.

11. Zauważ, że:

$$\begin{aligned}
W&=x^4y-x^4z+y^4z-xy^4+xz^4-yz^4=\\
&=xy\left(x^4-y^3\right)-z\left(x^4-y^4\right)+z^4(x-y)=\\
&=(x-y)\left(xy\left(x^2+xy+y^2\right)-z\left(x^3+x^2y+xy^2+y^3\right)+z^4\right)=\\
&=(x-y)\left(xy\left(x^2+xy+y^2\right)-xz\left(x^2+xy+y^2\right)-z\left(y^3-z^3\right)\right)=\\
&=(x-y)\left(x(y-z)\left(x^2+xy+y^2\right)-z(y-z)\left(y^2+yz+z^2\right)\right)=\\
&=(x-y)(y-z)\left(x\left(x^2+xy+y^2\right)-z\left(y^2+yz+z^2\right)\right)=\\
&=(x-y)(y-z)\left(\left(x^3-z^3\right)+y\left(x^2-z^2\right)+y^2(x-z)\right)=\\
&=(x-y)(y-z)(x-z)\left(x^2+xz+z^2+xy+yz+y^2\right).
\end{aligned}$$

9.

2. a) $x_1=x_2=-1,\ x_3=1$; b) $x_1=-1,\ x_2=x_3=1$;
c) $x_1=x_2-2,\ x_3=2$; d) $x_1=-2,\ x_2=x_3=1$;
e) $x_1=\frac{-1-\sqrt{37}}{2},\ x_2=1,\ x_3=\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$; f) $x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=1,\ x_4=3$.

3. a) $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=x_3=\frac{1}{2}$; b) $x_1=1,\ x_2=2$; c) $x_1=-1,\ x_2=1-\sqrt{2},\ x_3=1+\sqrt{2},\ x_4=4$;
d) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=3$; e) $x_1=-3,\ x_2=4$; f) $x_1=2-\sqrt{3},\ x_2=2+\sqrt{3}$.

4. a) $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-2,\ x_4=2$. Istotnie, gdyż $68x^8-257x^6-257x^2+68=$

$$\begin{aligned}
&=\left(64x^8-256x^6\right)+\left(4x^8-256x^2\right)-\left(x^6-64\right)-\left(x^2-4\right)=\\
&=64x^6\left(x^2-4\right)+4x^2\left(x^6-64\right)-\left(x^6-64\right)-\left(x^2-4\right)=\\
&=64x^6\left(x^2-4\right)+\left(4x^2-1\right)\left(x^6-64\right)-\left(x^2-4\right)=\\
&=\left(64x^6-1\right)\left(x^2-4\right)+\left(4x^2-1\right)\left(x^6-64\right)=\\
&=\left(8x^3-1\right)\left(8x^3+1\right)\left(x^2-4\right)+\left(4x^2-1\right)\left(x^3-8\right)\left(x^3+8\right)=
\end{aligned}$$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)(x-2)(x+2)+$

$+(2x-1)(2x+1)(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)=$

$=(2x+1)(2x-1)(x+2)(x-2)\cdot\left[(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)+\right.$

$\left.+(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\right]=$

$=(2x+1)(2x-1)(x+2)(x-2)\left[17x^4+8x^2+17\right].$

Zatem $68x^8-257x^6-257x^2+68=0 \iff (2x+1)(2x-1)(x+2)(x-2)=0$, bo $17x^4+8x^2+17>0$.

b) $36x^3-x+1=0 \iff (9x^3-x)+(27x^3+1)=0 \iff$

$\iff x(3x+1)(3x-1)+(3x+1)(9x^2-6x+1)=0 \iff$

$\iff (3x+1)(3x^2-x+9x^2-6x+1)=0 \iff$

$\iff (3x+1)(12x^2-7x+1)=0 \iff$

$\iff (3x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0 \iff x=-\frac{1}{3} \lor x=\frac{1}{3} \lor x=\frac{1}{4}.$

c) $(1+x^2)^2=4x(1-x^2) \iff (1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0 \iff$

$\iff (1-x^2-2x)^2=0 \iff x^2+2x-1=0 \iff x=-1-\sqrt{2} \lor x=-1+\sqrt{2}.$

10.

4. a) $x<-\frac{1}{4}$; b) $x\in\left\langle\frac{1}{7};\frac{1}{5}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right)$; c) $x\leqslant 1$; d) $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$;

e) $x<-2$ lub $x>5$; f) $x\in(-1;6)$; g) $x\in(-2;2)(7;+\infty)$.

5. $|x^4-4|-|x^2+2|=|x^4-x^2-6| \iff |(x^2+2)(x^2-2)|-(x^2+2)=$

$=|(x^4-4)-(x^2+2)| \iff (x^2+2)(|x^2-2|-1)=|(x^2+2)(x^2-2)-(x^2+2)| \iff$

$\iff (x^2+2)(|x^2-2|-1)=(x^2+2)|x^2-3| \iff |x^2-2|-1=|x^2-3| \iff$

$\iff |x^2-2|=|x^2-3|+1 \iff |(x^2-3)+1|=|x^2-3|+|1| \iff$

$\iff (x^2-3)\cdot 1\geqslant 0 \iff (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\geqslant 0 \iff x\leqslant-\sqrt{3} \lor x\geqslant\sqrt{3}.$

$x\in(-\infty;-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3};+\infty)$.

6. Zauważmy, że:

a) $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\geqslant 0 \iff \left((x^4)^2-2x^4+1\right)+(x^6-2x^4+x^2)\geqslant 0 \iff$

$\iff (x^4-1)^2+(x^3-x)^2\geqslant 0$. Ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $x\in \boldsymbol{R}$.

b) Jeśli $x<0$, to wszystkie składniki lewej strony nierówności są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa. Jeśli $0\leqslant x<1$, to $1-x>0$ i $x^6-x^{11}=x^6(1-x^5)\geqslant 0$, $x^{16}\geqslant 0$, więc nierówność także jest prawdziwa. Jeśli wreszcie $x\geqslant 1$, to $x^{16}-x^{15}=x^{11}(x^5-1)\geqslant 0$ i $x^6-x=x(x^5-1)\geqslant 0$ i $1>0$, zatem i w tym przypadku nierówność jest prawdziwa.

7. $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{2};1)\cup(\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Rozdział III.

1.

7. a) $\frac{1}{3}(x+2)$, gdy $x \neq 2$; b) $\frac{x-3}{x-2}$, gdy $x \neq -2$ i $x \neq 2$;
c) $x-2$, gdy $x \neq -2$ i $x \neq -1$; d) $x-3$, gdy $x \neq 1$ i $x \neq 2$.

8. a) $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$; b) $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$; c) $\boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$; d) $\boldsymbol{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$; e) $\boldsymbol{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

9. a) $\frac{-x-1}{6x^2-3x}$; b) $\frac{8}{3x}$; c) $\frac{-2x+1}{x^2-x}$; d) 0; e) $-\frac{1}{x^4-x^2}$.

10. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$. Istotnie, po podstawieniu do podanego równania, to jest (1) $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$, w miejsce x wyrażenie $\frac{1}{1-x}$, otrzymujemy równanie: (2) $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$. Gdy zaś w równaniu (1) podstawimy w miejsce x wyrażenie $\frac{x-1}{x}$, otrzymamy równanie: (3) $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}$. Teraz z układu równań (1)–(3) należy wyznaczyć $f(x)$. Dodajemy stronami równania (1) i (3) i do otrzymanego równania podstawiamy, na mocy równania (2), $\frac{1}{1-x}$.

Stąd $2f(x) + \frac{1}{1-x} = x + \frac{x-1}{x}$, czyli $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$.

Trzeba jeszcze sprawdzić, czy otrzymana funkcja spełnia równanie (1):

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + 1 - (1-x) + \frac{1-x}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x.$$

2.

1. a) $\frac{2x-1}{x^2-1}$, gdy $x \neq -1$ i $x \neq 1$; b) $\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$; c) 0, gdy $|a| \neq |b|$.

2. a) $\frac{2a+1}{a-b}$, gdy $a \neq b$; b) $\frac{2a^2-7a+7}{(a-3)^2(a-1)}$, gdy $a \neq 1$ i $a \neq 3$;
c) $\frac{a+2}{a^2+2a+4}$, gdy $a \neq 1$ i $a \neq 2$; d) $-m$, gdy $m \neq 0$ i $m \neq 1$.

3. a) $\frac{b+1}{ab^2}$, gdy $a \neq 0$ i $b \neq 0$; b) 2, gdy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$.

4. a) 1, gdy $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$; b) $\frac{a+b}{a-b}$, gdy $|a| \neq |b|$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
c) $\frac{1}{a+c}$, gdy $|a| \neq |c|$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

3.

3. a) $x = 1$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) równanie jest tożsamościowe w zbiorze $\boldsymbol{R} \setminus \left\{-\frac{9}{2}, 3\right\}$.

4. a) $x = \frac{2}{3}$; b) $x = 0$; c) $x = \frac{43}{4}$; d) $x = -5$.

5. a) $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 3$; b) $x_1 = -4$, $x_2 = 9$; c) $x = -1$; d) $x = 8$.

6. Pierwszy robotnik wykona tę pracę w ciągu 14 dni, a drugi w ciągu 11 dni.

7. 50 km/h.

4.

1. a) jedno rozwiązanie: $x = \frac{-a}{2a-1}$, gdy $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$; brak rozwiązania, gdy $a = 0$ lub $a = \frac{1}{2}$, lub $a = 1$;

b) jedno rozwiązanie: $x = \frac{ab}{3a+2b}$, gdy $b \neq 0$, $a \neq -b$, $a \neq -2b$ i $a \neq -\frac{3}{2}b$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a = b = 0$; brak rozwiązań, gdy $a \neq 0$ i ($b = 0$ lub $b = -a$, lub $b = -\frac{1}{2}a$, lub $b = -\frac{2}{3}a$);

c) jedno rozwiązanie: $x = \frac{ab}{a+b}$, gdy $a \neq 0$, $a \neq -2b$ i $a \neq -b$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a = b = 0$; brak rozwiązań, gdy $b \neq 0$ i $a = 0$ lub $a = -b$, lub $a = -2b$;

d) jedno rozwiązanie: $x = 4a$, gdy $a \neq 0$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a = 0$;

e) jedno rozwiązanie: $x = \frac{a}{2}$, gdy $a \neq 0$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $a = 0$;

f) jedno rozwiązanie: $x = \frac{2(1-b)^2}{4b}$, gdy $b \neq -1$, $b \neq 0$ i $b \neq 1$; brak rozwiązań, gdy $b = -1$ lub $b = 0$, lub $b = 1$;

g) jedno rozwiązanie: $x = -m$, gdy $m \neq 0$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 0$.

2. $a = 1, b = -2$.

3. $x = \frac{ab}{a+b}$, jeśli $a \neq b$.

4. $m \in \langle -1; 1 \rangle$. Wskazówka: Sporządź wykres funkcji $y = \frac{x(1+x^2)}{|x|}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

5. $x = 1$ dla $m = -1$; $x = \frac{9}{2}$ dla $m = \frac{5}{2}$.

6. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right\rangle$. Wskazówka: Podstaw $\frac{x^2}{x^2+1} = t$.

5.

3. a) $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right)$; b) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{9}{5}; +\infty\right)$; c) $x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{12}\right)$;
d) $x \in (-\infty; 1)$; e) $x \in (0; +\infty)$; f) nierówność tożsamościowa.

4. a) $x \in (0; +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 2)$; c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$;
d) $x \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup (2; +\infty)$; f) $x \in (2; 3)$.

5. a) $x \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \right\rangle \setminus \{-1, 1\}$; b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{4}; 2\right)$; d) $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right) \cup (2; +\infty)$;
e) $x \in \langle -5; -4) \cup \left(-2; -2+\sqrt{3}\right\rangle$.

6. a) $\frac{x^2}{4+9x^4} \leqslant \frac{1}{12} \iff 12x^2 \leqslant 4 + 9x^4 \iff 9x^4 - 12x^2 + 4 \geqslant 0 \iff (3x^2-2)^2 \geqslant 0$;

b) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2} \iff -(x^2+1) \leqslant 2x \leqslant x^2+1 \iff |2x| \leqslant x^2+1 \iff$
$\iff 2|x| \leqslant x^2+1 \iff (|x|-1)^2 \geqslant 0$;

c) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2 \iff x^2+3 > 2\sqrt{x^2+2} \iff (x^2+2) - 2\sqrt{x^2+2} + 1 > 0 \iff$
$\iff \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - 2\sqrt{x^2+2} + 1 > 0 \iff \left(\sqrt{x^2+2} - 1\right)^2 > 0$.

6.

6. a) $\frac{-x+3}{x-1}$, gdy $x \neq 1$; b) $y = 2$, gdy $x \neq 1$; c) $y = \frac{x-1}{x+1}$, gdy $x \neq -1$.

7. a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = 3$.

8. a) $x = 2$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = 2$;

d) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; e) $x \in (-\infty; 0) \cup \left\langle \frac{1}{8}; +\infty \right)$; f) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

9. a) $x = y = 0$ lub $x = y = 5$;

b) $x = -6$, $y = -2$ lub $x = -5$, $y = -3$, lub $x = 1$, $y = 5$, lub $x = 2$, $y = 4$.

10. Zauważmy, że $\frac{7x+1}{3x+4} = 2 + \frac{x-7}{3x+4}$. Widzimy stąd, że $3x + 4$ musi być dzielnikiem $x - 7$. Musi więc zachodzić nierówność $|x - 7| \geqslant |3x + 4|$. Rozwiązując ją, stwierdzamy, że jedynymi liczbami całkowitymi, które spełniają tę nierówność, są: $-5, -4, -3, -2, -1$ i 0. Podstawiając je do wzoru naszej funkcji, otrzymujemy jej wartości całkowite tylko dla $x = -3$ i $x = -1$.

11. Oczywiście, musi być $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Przepisując podane równanie równoważnie, otrzymujemy równania:

$xy = 14x + 14y, \quad (x - 14) \cdot (y - 14) = 196.$

Z rozłożenia na wszelkie możliwe sposoby liczby 196 na iloczyn dwóch liczb całkowitych wynika, że rozwiązaniami danego równania w liczbach całkowitych są pary: $(15; 210)$, $(210; 15)$, $(13; -182)$, $(-182; 13)$, $(16; 112)$, $(112; 16)$, $(12; -84)$, $(-84; 12)$, $(18; 63)$, $(63; 18)$, $(10; -35)$, $(-35; 10)$, $(21; 42)$, $(42; 21)$, $(7; -14)$, $(-14; 7)$, $(28; 28)$.

Rozdział IV.

1.

6. Wypiszmy kilka wyrazów tego ciągu i ich różnice: $x_3 = 9$, $x_4 = 14 = x_3 + 5$, $x_5 = 20 = x_4 + 6$, $x_6 = 27 = x_5 + 7, \ldots$ Stąd $x_n = x_{n-1} + (n + 1)$ dla $n \geqslant 4$.

Wobec tego $x_n = x_3 + 5 + 6 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+3)}{2}$. Udowodnimy ten wzór, stosując zasadę indukcji matematycznej. Gdy $n = 4$, to oczywiście wzór ten zachodzi.

Załóżmy, że $x_n = \frac{n(n+3)}{2}$. Wykażemy, że $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$.

Istotnie, $x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = 2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$

i wobec tego kolejna po niej liczba jest złożona (gdyż jeden z czynników: $n + 1$ lub $n + 4$ jest liczbą parzystą i oba są większe od 2).

Zatem $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$, zaś $x_{1000} = \frac{1000 \cdot 1003}{2} = 501500$.

7. a) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$; b) $a_n = n^2$; c) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^3$;

d) $a_n = \frac{1}{n}$; e) $a_n = 2^n - 1$; f) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

9. Zauważmy, że wzór na ogólny wyraz ciągu (a_n) jest postaci $a_n = 2^n - 1$ (udowodnij go, stosując zasadę indukcji matematycznej). Zatem suma, którą mamy obliczyć, przybiera teraz postać: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \ldots + (2^n - 1) =$ $= (1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) - (n+1) = 2^{n+1} - 1 - (n+1) = 2^{n+1} - (n+2)$.

10. Wypisując kilka początkowych wyrazów tego ciągu, nietrudno odgadnąć wzór na jego ogólny wyraz. Jest nim: $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Aby przekonać się o prawdziwości tego wzoru dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, dowodzimy go indukcyjnie. Suma, którą mamy obliczyć, przybiera więc postać:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

11. a) $x_{2003} = \sqrt{15}$; b) $x_{2003} = 1$. Wskazówka: Zauważmy, że ciągi te są okresowe.

2.

7. a) Zauważmy, że $a_n = \frac{n}{n+1}$ (zobacz rozwiązanie zadania 10 z podrozdziału 1);

b) Zauważmy, że $b_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$;

c) Ciąg (c_n) można zapisać prościej, a mianowicie:

$$c_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{3n};$$

d) Zauważmy, że $d_n = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} =$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

8. a) Wykażmy, że gdy $n \geqslant 5$, to $x_n < 1$. Ponieważ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{9}{8}$, $x_4 = 1$, więc $\max\{x_n; n \in N_+\} = x_3 = \frac{9}{8}$;

b) Ponieważ $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n} = \frac{1}{20} \cdot \frac{2\sqrt{100n}}{100+n} \leqslant \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20}$ na mocy nierówności $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, więc $x_n \leqslant \frac{1}{20}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, przy czym $x_n = \frac{1}{20} \iff n = 100$; wobec tego $\max\{x_n; n \in N_+\} = x_{100} = \frac{1}{20}$;

c) Jeśli $x_n = \frac{1000^n}{n!}$, to $x_{n+1} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. Zatem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1}$; stąd $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \iff \frac{1000}{n+1} > 1 \iff n+1 < 1000 \iff n < 999$.

Ciąg (x_n) jest więc rosnący dla $n < 999$, malejący zaś dla $n > 999$. Wobec tego $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{999} > x_{1000} > x_{1001} > \ldots$ Stąd $\max\{x_n; n \in N_+\} = x_{999} = \frac{1000^{999}}{999!}$.

3.

5. $x = 65$, $y = 129$, $z = 193$.
6. 60.
7. $60°, 90°, 120°$.
8. a) Dla wszystkich n; b) dla wszystkich n.
9. Wskazówka: Podstaw do dowodzonej tożsamości $b = \frac{a+c}{2}$ i przekształcaj ją równoważnie.
10. Ponieważ ciągi (a, b, c) i (a^2, b^2, c^2) są arytmetyczne, więc $2b = a + c$ i $2b^2 = a^2 + c^2$. Stąd $4b^2 = (a+c)^2$ i $4b^2 = 2(a^2 + c^2)$, czyli $2(a^2 + c^2) = (a+c)^2$, $a^2 + c^2 = 2ac$, $(a-c)^2 = 0$ i ostatecznie $a = c$. Wracając z tym do równości $2b = a + c$, otrzymujemy ostatecznie, że $a = b = c$.
11. Skoro ciąg $\left(\frac{1}{b+a}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}\right)$ jest arytmetyczny, więc $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b}$. Stąd wynika równość $2b^2 = c^2 + a^2$, która dowodzi, że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny.

4.

7. 43. Wskazówka: Zobacz przykład 8.
8. 0.
9. Zauważmy, że $\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \iff \frac{a_1 + a_m}{a_1 + a_n} = \frac{m}{n} \iff n(a_1 + a_m) = m(a_1 + a_n)$. Po oznaczeniu przez r różnicy tego ciągu otrzymujemy dalej:
$n(a_1 + a_m) = m(a_1 + a_n) \iff n(a_1 + a_1 + (m-1)r) = m(a_1 + a_1 + (n-1)r)$, a stąd po przekształceniach – równość $(n-m)(2a_1 - r) = 0$. Gdy $m = n$, to oczywiście równość zachodzi. Jeśli zaś $r = 2a$, to:
$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)r}{a_1 + (n-1)r} = \frac{a_1 + (m-1)\cdot 2a_1}{a_1 + (n-1)\cdot 2a_1} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

5.

1. $4{,}488\ m^3$.
2. Lolek dogoni Bolka w dziesiątym dniu od chwili rozpoczęcia podróży. Będzie to w odległości 640 km od miejsca rozpoczęcia podróży.
3. Synowie mają odpowiednio 17, 14, 11, 8 i 5 lat.
4. Jeżeli przez a_1 oznaczymy wartość użytkową tej maszyny po pierwszym roku, to z układu $3a_{25} = a_{15}$ i $a_n = 0$ otrzymamy $n = 30$.
5. Po 8 sekundach.
6. 12.
7. $172°$ i $8°$.
8. 10 boków.
9. 8 albo 15.
10. 12 sekund, 21 litrów.

6.

3. a) $a_1 = \frac{2}{5}$, $q = 10$; b) $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 1$, $q = 2$; c) $a_1 = 1$, $q = 3$.
4. $x = 50$.

5. $a_1 = 3.$

6. $q = \frac{1}{2}.$

7. $S_n = \begin{cases} \frac{a_1}{q-1}\left(nq^n - \frac{q^n - 1}{q-1}\right), & \text{gdy } q \neq 1 \\ \frac{a_1}{2} n(n+1), & \text{gdy } q = 1. \end{cases}$

8. Zauważmy, że $\underbrace{11\ldots1}_{k} = \frac{1}{9}(10^k - 1).$

Wtedy daną sumę można wyrazić wzorem: $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 1) - \frac{1}{9}(n+1).$

7.

3. $S_n = 77.$

4. $A = 2, B = 32.$

5. Ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 9$, $r = 8$; ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 9$, $q = \frac{5}{3}$.

8.

1. 120%.

2. Druga; o 2080 zł.

3. 1023 p.

4. 16 zł, 20 zł, 25 zł.

5. 243 cm.

9.

3. Większą kwotę otrzymamy, lokując pieniądze na 4% przez 10 lat.

4. Gdyby ojciec nie zwiększył kapitału, to po 20 latach na koncie byłoby około 34564 zł, a więc mniej, niż zaplanował. Aby jego plan się powiódł, powinien po 12 latach dopłacić 285 zł.

5. 8000 zł.

7. $K = \frac{r\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]}{\frac{p}{100}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$

8. Około 1223 zł.

10.

4.	a) tak;	b) nie;	c) nie;	d) tak.
5.	a) tak;	b) tak;	c) tak;	d) nie.

11.

4.	a) prawdziwe;	b) prawdziwe;	c) fałszywe;	d) prawdziwe.
5.	a) 1;	b) 0;	c) 1;	d) 0.

6. Wszystkie podane ciągi są ograniczone, gdyż dla każdej dodatniej liczby naturalnej n:

a) $0 < a_n < 1$; b) $0 < a_n < 1$; c) $0 < a_n < 3$, wskazówka: $a_n = \frac{3n^2-1}{2+n^2} = 3 - \frac{7}{2+n^2}$;

d) $0 < a_n < \sqrt{2}$, wskazówka: $\frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{1+n}{2}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{2}}} \leqslant \sqrt{2}$, na mocy nierówności

$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

e) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ i oczywiście $0 < a_n < 1$;

f) $a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$ i oczywiście $0 < a_n < 1$.

12.

2. a) $\frac{3}{2}$; b) 7; c) 5; d) -2; e) -4; f) -1.

3. a) $-\frac{5}{2}$; b) -1; c) $\frac{3}{2}$.

4. a) $\frac{7}{4}$; b) 14; c) 3; d) 1; e) 3; f) $\frac{1}{7}$.

5. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1.

6. a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) -2.

7. a) 4; b) $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

13.

1. a) 0; b) $\frac{5}{3}$; c) 10; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{4}{3}$; f) -1;
g) 2; h) $-\frac{3}{2}$; i) -1.

2. a) 3; b) $\frac{1}{7}$; c) 0.

3. a) Ponieważ dla każdej liczby $k \in \{2, 3, \ldots, n, n+1\}$ zachodzi $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$, więc:

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

b) Zauważmy, że $1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+3}{k+2}$ dla każdej liczby $k\in\{2,3,\cdots,n,n+1\}$, więc:

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+4}{n+3}=$$

$$=\frac{2}{4}\cdot\frac{n+4}{n+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}.$$

c) Ponieważ $\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\cdot3}\right)$,

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\cdot4}\right)$$

i ogólnie:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{2}{3}.$

d) Mamy: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot2^{\frac{1}{2^n}}=2$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}=2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}}.$$

Ale $1<(2)^{\frac{1}{2^n}}<2^{\frac{1}{n}}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n (bo $2^n>n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n) oraz $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$, więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$.

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{2}{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}=2.$

4. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{1}{12}$; d) 1.

Wskazówka: Zauważ, że $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ i skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach.

14.

3. a) $+\infty$; b) 0; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$.

4. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, więc:

$$\bigwedge_{A>0} \bigvee_{\delta_1 \in R} \bigwedge_{n>\delta_1} \left(a_n > \frac{A}{2}\right) \text{ i } \bigwedge_{A>0} \bigvee_{\delta_2 \in R} \bigwedge_{n>\delta_2} \left(b_n > \frac{A}{2}\right).$$

Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, gdzie δ jest nie mniejszą z liczb δ_1 i δ_2, zachodzą obie nierówności $a_n > \frac{A}{2}$ i $b_n > \frac{A}{2}$ jednocześnie, więc dodane stronami prowadzą do nierówności $a_n + b_n > A$. Zatem $\bigwedge\limits_{A>0} \bigvee\limits_{\delta \in R} \bigwedge\limits_{n>\delta} (a_n + b_n > A)$ i wobec tego ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

5. Twierdzenie: Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$. Dowód – jak twierdzenia z zadania 4.

6. a) Rozbieżny do $+\infty$; b) rozbieżny do $-\infty$; c) zbieżny do 2;
d) rozbieżny do $-\infty$; e) zbieżny do -1.
Odpowiedź: Nie można, co potwierdzają powyższe przykłady.

7. a) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to:

$$\bigwedge_{A>0} \bigvee_{\delta_1 \in R} \bigwedge_{n>\delta_1} (a_n > \sqrt{A}) \text{ i } \bigwedge_{A>0} \bigvee_{\delta_2 \in R} \bigwedge_{n>\delta_2} (b_n > \sqrt{A}).$$

Stąd wynika, że $\bigwedge\limits_{A>0} \bigvee\limits_{\delta \in R} \bigwedge\limits_{n>\delta} (a_n \cdot b_n > A)$. Wystarczy bowiem przyjąć za δ nie mniejszą z liczb δ_1 i δ_2. Wtedy dla $n > \delta$ będziemy mieć nierówności $a_n > \sqrt{A}$ i $b_n > \sqrt{A}$, które pomnożone stronami prowadzą do nierówności: $a_n \cdot b_n > A$.

Jeśli zaś $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-b_n) = +\infty$ (wykaż to!) i wówczas na mocy udowodnionej już części twierdzenia wnosimy, że:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) \cdot (-b_n) = +\infty$.

b) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot (-b_n) = +\infty$, skąd:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.

8. a) Rozbieżny do $+\infty$; b) zbieżny do zera; c) zbieżny do 2.
Odpowiedź: Nie można, o czym świadczą powyższe przykłady.

9. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$. Z kolei ciąg (a_n) jest ograniczony. Zatem iloczyn ciągów (a_n) i $\left(\frac{1}{b_n}\right)$, czyli ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, jest ciągiem zbieżnym do zera.

10. a) $k = 2$; b) $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ lub $k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; c) $k = 3$; d) $k = -1$.

11. a) $k = 0$; b) dla żadnej wartości k; c) $k = 2$;
d) $k = 1$; e) dla żadnej wartości k.

15.

5. a) 2; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{5}$; d) 12; e) $4 + 4\sqrt{2}$; f) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)^3$; g) $2 + \sqrt{2}$; h) $2 - \sqrt{2}$.

6. a) $\frac{1}{9}$; b) $3\frac{5}{9}$; c) 1; d) $1\frac{7}{30}$; e) $\frac{53}{900}$; f) $\frac{4}{11}$; g) $\frac{4}{33}$; h) $1\frac{4}{165}$;
i) $\frac{224}{999}$; j) $3\frac{2498}{4995}$; k) $\frac{7}{60}$; l) $\frac{37}{300}$; ł) $2\frac{53}{165}$; m) $\frac{728}{999}$.

7. a) tak; b) tak; c) tak; d) tak.

8. a) $x = \frac{1}{5}$; b) $x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}$; c) $x = 3$; d) $x = \frac{9}{2}$; e) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $x = -\frac{3}{2}$; g) $x = 2$.

9. a) $x > -\frac{1}{2}$; b) $x \in (-2; 0\rangle$.

16.

1. Z treści zadania mamy: $a_1 = 2, |q| < 1, \frac{3a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2}$. Stąd $q = -\frac{1}{3}$.

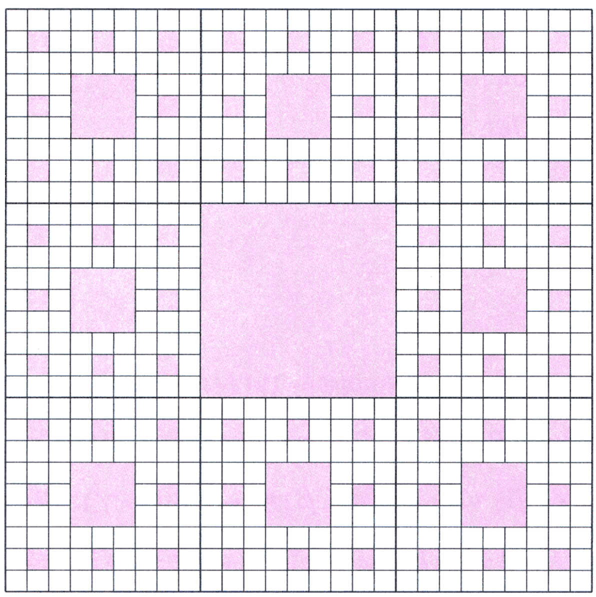
2. Ciąg wyrazów o wskaźnikach nieparzystych $a_1, a_3, a_5, \ldots$ też jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q^2. Otrzymujemy zatem układ równań $\frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{2}$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 1$, a stąd: $a_1 = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{2}$.

3. $x \in (0; 1) \cup (2; 3)$.

4. $x = 2$.

5. $\left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\right)\left(1 - q + q^2 - q^3 + \ldots\right) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1+q} = \frac{1}{1-q^2}$.

6. a) Zobacz: rycina 5.



Ryc. 5.

b) Mamy: $p_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$, $S_n = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$,

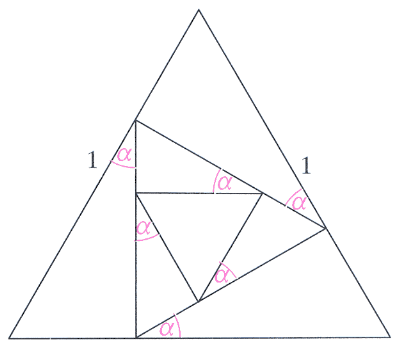
zatem $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = \dfrac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1$.

7. $S = r\sqrt{3}$.

8. $S = \frac{11\pi}{96}$. Promienie kolejnych wpisanych kół (z dużym pojedynczym włącznie) mają odpowiednio długości $\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{\sqrt{3}}{54}, \ldots$. Suma pól kół składa się z pola tego pojedynczego koła i potrojonej sumy szeregu pozostałych kół:

$$S = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 3\pi \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2}{1 - \frac{1}{9}}.$$

9. $S = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Zauważ, że długości boków powstałych w ten sposób trójkątów (ryc. 6) tworzą nieskończony ciąg geometryczny: $1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \ldots$.



Ryc. 6.

10. πa. Promienie kolejnych półokręgów tworzą ciąg: $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \ldots$, a długości kolejnych półokręgów – ciąg: $\frac{\pi a}{2}, \frac{\pi a}{4}, \frac{\pi a}{8}, \ldots$.

Rozdział V.

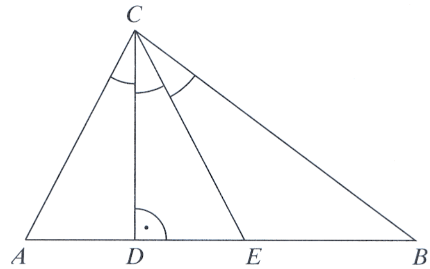
1.

3. Z twierdzenia sinusów otrzymujemy (przy oznaczeniach standardowych) związki: $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$. Ponadto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, skąd $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, więc $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$. Zatem

$$\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta \iff \sin\gamma < \sin\alpha + \sin\beta \iff$$
$$\iff 2R\sin\gamma < 2R\sin\alpha + 2R\sin\beta \iff c < a + b.$$

4. $R = 6$.

5. 30°, 60°, 90°. Wskazówka: Zastosuj twierdzenie sinusów do trójkąta równoramiennego ACE (ryc. 7).



Ryc. 7.

6. Jeżeli bok ten ma długość a, zaś kąty do niego przyległe mają miary α i β, to pole S tego trójkąta można wyrazić wzorem: $S = \dfrac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

7. Niech R będzie długością promienia tego okręgu. Z twierdzenia sinusów wynikają związki: $AB = 2R\sin C$, $BC = 2R\cdot\sin A$, $CA = 2R\cdot\sin B$, $DE = 2R\sin F$, $EF = 2R\sin D$, $FD = 2R\sin E$. Wobec tego $AB + BC + CA = DE + EF + FD \iff$
$\iff 2R\sin C + 2R\sin A + 2R\sin B = 2R\sin F + 2R\sin D + 2R\sin E \iff$
$\iff \sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$.

8. $BC = 20\sin 15°$, $CA = \dfrac{5\sqrt{2}}{\cos 15°}$, $R = 20\sin 15°$.

9. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

10. $\dfrac{8\sqrt{6}}{\cos 15°}$.

11. $2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta))$.

13. 49°28'.

14. Z twierdzenia sinusów: $\dfrac{a}{2R} = \sin\alpha$, $\dfrac{b}{2R} = \sin\beta$, $\dfrac{c}{2R} = \sin\gamma$, stąd $a\sin\alpha + b\sin\beta =$
$= \dfrac{a^2}{2R} + \dfrac{b^2}{2R} = \dfrac{a^2+b^2}{2R}$.

Z założenia $a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma$, więc $\dfrac{a^2+b^2}{2R} = \dfrac{c^2}{2R}$, skąd $a^2 + b^2 = c^2$. Z ostatniej równości wnosimy (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa), że trójkąt ten jest prostokątny.

15. Z założenia wynika równość $2\sin^2\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\gamma$, która na mocy twierdzenia sinusów równoważna jest równości $2b^2 = a^2 + c^2$.

2.

4. a) $\cos A = -\dfrac{1}{2}$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

b) $A = 30°$, $B = 60°$, $C = 90°$.

5. $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$, $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

6. 2,75 i 5,25.

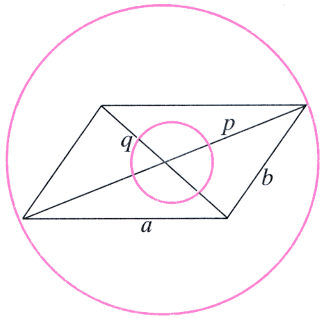
7. $1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{d}\right)^2$.

8. $\dfrac{a}{3}\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$ lub $\dfrac{a}{3}\sqrt{10 - \sqrt{3}}$.

10. $S = \dfrac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi$, jeśli $(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi > 0$.

11. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$

12. Rozważmy równoległobok o bokach i przekątnych długości odpowiednio a, b, p i q, zawierający koło o promieniu długości r i zawarty w kole o promieniu długości R (ryc. 6). Przyjmijmy, że $p \geqslant q$. Ponieważ $2\left(a^2 + b^2\right) = p^2 + q^2$ (zobacz przykład 4), więc $p^2 \geqslant a^2 + b^2$. Ponadto zachodzą oczywiście nierówności: $2R \geqslant p$, $2r \leqslant a$, $2r \leqslant b$. Wobec tego $4R^2 \geqslant p^2 \geqslant a^2 + b^2 = (2r)^2 + (2r)^2 = 8r^2$, skąd $4R^2 \geqslant 8r^2$, $R^2 \geqslant 2r^2$, $\left(\frac{R}{r}\right)^2 \geqslant 2$ i ostatecznie $\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}$.



Ryc. 8.

13. Po przekształceniach otrzymujemy, że:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c} \iff b^2 = a^2 + c^2 - ac.$$

Ponadto z twierdzenia cosinusów $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Zatem $a^2 + c^2 - ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, skąd $\cos\beta = \frac{1}{2}$ i ostatecznie $\beta = 60°$.

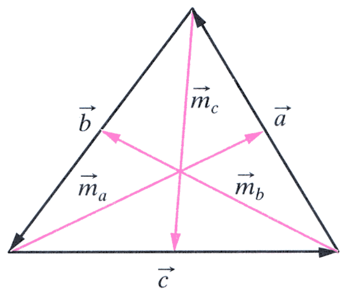
Rozdział VI.

1.

15. Zbuduj sumę i różnicę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i skorzystaj z nierówności trójkąta.

16. $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$.

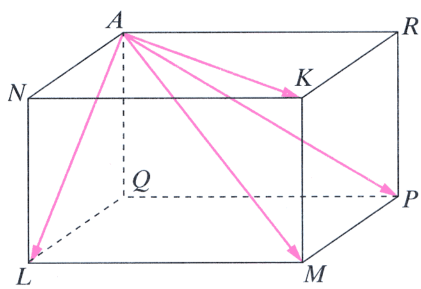
17. $\overrightarrow{m_a} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$, $\overrightarrow{m_b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{c}\right)$, $\overrightarrow{m_c} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ (ryc. 9).



Ryc. 9.

18. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 10. Wówczas:

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{LM} =$$
$$= 3\overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{LM}\right) =$$
$$= 3\overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{PM}\right) =$$
$$= 3\overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PM}\right) = 3\overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM}\right) =$$
$$= 3\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM}.$$



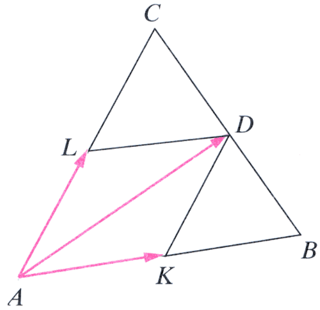
Ryc. 10.

2.

9. Zauważmy, że $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right)$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.
Po dodaniu tych równości stronami otrzymamy dowodzoną równość.

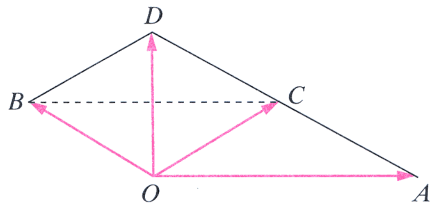
10. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\vec{p} + 4\vec{q}$, $\overrightarrow{AN} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\vec{p} - 2\vec{q}$.

11. Przy oznaczeniach jak na rycinie 11 możemy napisać: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$. Prowadząc odcinek LD równolegle do AB, otrzymujemy $\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BD} = 1 + \frac{DC}{BD}$. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie: $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB}$.
Zatem $\frac{AC}{AL} = 1 + \frac{AC}{AB}$, skąd $\frac{AL}{AC} = \frac{AB}{AB+AC}$, więc $\overrightarrow{AL} = \frac{AB}{AB+AC} \cdot \overrightarrow{AC}$. Podobnie $\overrightarrow{AK} = \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB}$.
Wobec tego:
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AK} = \frac{AB}{AB+AC}\overrightarrow{AC} + \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB}$.



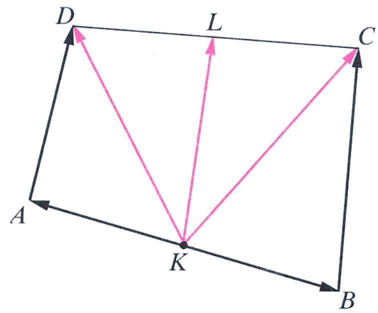
Ryc. 11.

12. Zgodnie z określeniem sumy wektorów $\overrightarrow{OC}$ jest przekątną równoległoboku $OACB$ (ryc. 12), $\overrightarrow{OD}$ zaś równoległoboku $OCDB$, a ponadto $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB}$. Stąd oraz z założenia, że $OB = OC = OD$, wynika równoboczność trójkąta OCD, zatem $\sphericalangle COD = 60^\circ$. Ponieważ trójkąty OCD i ODB są przystające, więc $\sphericalangle COB = 120^\circ$. Z równości $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ wynika, że $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, a stąd $OB = AC$. Wobec tego trójkąt OAC jest równoramienny (bo $OC = AC$). Ale $\sphericalangle OCD = 60^\circ$, więc $\sphericalangle ACO = 120^\circ$. Zatem $\sphericalangle AOC = 60^\circ$, dlatego $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 60^\circ + 120^\circ = 150^\circ$.



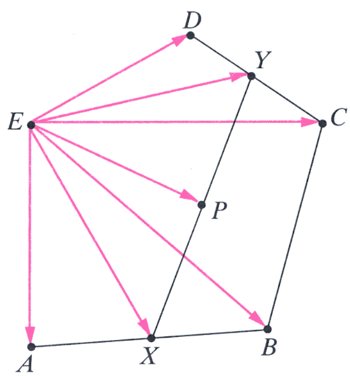
Ryc. 12.

13. Przy oznaczeniach jak na rycinie 13 otrzymujemy:
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right).$$



Ryc. 13.

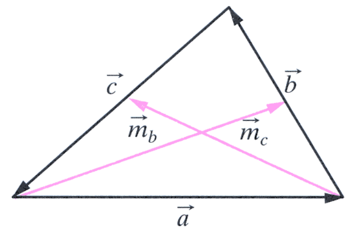
14. Otrzymujemy (ryc. 14):
$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EX} + \overrightarrow{EY}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}\right).$$



Ryc. 14.

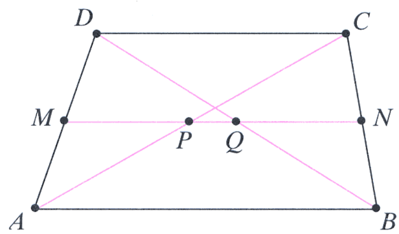
3.

1. Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.
2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 15. Wiemy, że $\overrightarrow{m_b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{m_c} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. Wektor $\vec{a}$ można przedstawić w postaci $(*)$ $\vec{a} = x\overrightarrow{m_b} - y\overrightarrow{m_c}$, gdzie x i y są pewnymi liczbami rzeczywistymi.
   Podstawiając do równości $(*)$ wyznaczonych wektorów $\overrightarrow{m_b}$ i $\overrightarrow{m_c}$, dostajemy:
   $\vec{a} = x\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - y\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$,



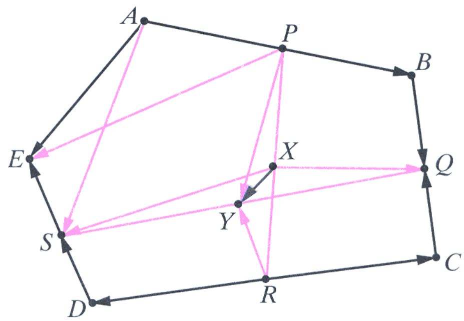
Ryc. 15.

   skąd po uwzględnieniu równości $\vec{c} = -\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ otrzymujemy równość:
   $\vec{a} = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{b}$, która jest możliwa jedynie wtedy, gdy $x + \frac{1}{2}y = 1$ i $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$. Stąd $x = y = \frac{2}{3}$.
3. Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.
4. Wskazówka: Sporządź odpowiednią rycinę, a zauważysz, że $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF}$.
5. Niech A, B, C, D będą wierzchołkami danego czworokąta, P – środkiem przekątnej AC, Q – środkiem przekątnej BD, M – środkiem AD, N – środkiem BC (ryc. 16).
   Wówczas punkty M, P, Q i N leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{MN} = a \cdot \overrightarrow{MP}$ i $\overrightarrow{MN} = b \cdot \overrightarrow{MQ}$ dla pewnych, różnych od zera, liczb a i b.
   Stąd $2\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{MP} + b\overrightarrow{MQ} = a\left(1 + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MP}$.
   Ale ponieważ $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ oraz $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, więc
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = a\left(1 + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MP} \iff$
   $\iff \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \iff$
   $\iff \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{b}\right) - 1\right)\overrightarrow{DC}$.



Ryc. 16.

   Ostatnia równość dowodzi oczywiście równoległości wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$. Stąd zaś wynika, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD.
   Załóżmy teraz, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD. Wówczas nietrudno wykazać równoległość wektorów $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MQ}$ i $\overrightarrow{DC}$, która dowodzi współliniowości punktów M, P, Q i N.
6. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 17.
   Wówczas zauważymy, że $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{XS}\right)$
   oraz $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PY} + \overrightarrow{RY}\right)$.
   Po dodaniu tych równości stronami otrzymujemy:
   $2\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{XS} + \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{RY}\right) =$



Ryc. 17.

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{RC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{RD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BQ}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{CQ}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ES}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{ED}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE},$$

stąd $2\overrightarrow{XY}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ i ostatecznie $\overrightarrow{XY}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, co było do udowodnienia.

4.

5. a) -3; b) $-2\sqrt{2}$; c) -5; d) 0.

6. a) $45°$; b) $150°$; c) $120°$.

7. a) 2; b) 6; c) -2; d) 0; e) 4; f) -4.

8. a) $\sqrt{13}, \sqrt{7}$; b) $2\sqrt{3}, 2\sqrt{7}$.

9. a) -10; b) 5.

10. a) $2u^2+2\vec{u}\circ\vec{v}$; b) u^2-4v^2; c) v^2-u^2; d) u^2+v^2; e) $4\vec{u}\circ\vec{v}$.

11. a) 13; b) 7.

12. a) 10; b) $10\sqrt{7}$.

13. a) $\sqrt{7}, \sqrt{13}$; b) $15, \sqrt{593}$.

14. 392.

15. $-\frac{3}{2}$.

16. Ponieważ: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$,

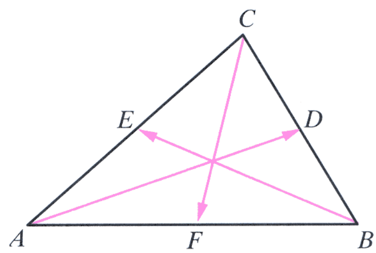
$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$,

$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$ (ryc. 16), więc

$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{BE}=$

$=\overrightarrow{AB}\circ\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BC}\circ\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+$

$+\overrightarrow{CA}\circ\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=$



Ryc. 18.

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BC}=0.$$

17. Pomnóżmy skalarnie obie strony danego równania przez wektor $\vec{b}$. Otrzymamy wtedy równanie $3\left(\vec{x}\circ\vec{b}\right)+2\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{x}\circ\vec{b}\right)=\vec{c}\circ\vec{b}$, a stąd $\vec{x}\circ\vec{b}=\dfrac{\vec{c}\circ\vec{b}}{3+2\vec{a}\circ\vec{b}}$, gdyż $3+2\vec{a}\circ\vec{b}\neq 0$ (z założenia). Po wstawieniu tej wartości do danego równania otrzymujemy $\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{c}\circ\vec{b}}{3+2\vec{a}\circ\vec{b}}\vec{a}$.

18. Pomnóżmy skalarnie obie strony podanych równań przez wektor $\vec{b}$. Otrzymamy wtedy układ:

$$\begin{cases} 2\left(\vec{x}\circ\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{y}\circ\vec{b}\right)=\vec{c}\circ\vec{b} \\ 4\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{x}\circ\vec{b}\right)+\vec{y}\circ\vec{b}=\vec{d}\circ\vec{b}. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu go jako układu równań z niewiadomymi $\vec{x}\circ\vec{b}$ i $\vec{y}\circ\vec{b}$ otrzymujemy:

$$\vec{x}\circ\vec{b}=\frac{\vec{c}\circ\vec{b}-3\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{d}\circ\vec{b}\right)}{2-12\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^2},$$

$$\vec{y}\circ\vec{b}=\frac{\vec{d}\circ\vec{b}-2\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{c}\circ\vec{b}\right)}{1-6\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^2},$$

ponieważ $1-6\vec{a}\circ\vec{b}\neq 0$ (z założenia). Po wstawieniu otrzymanych wartości do wyjściowych równań znajdujemy:

$$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\vec{d}\circ\vec{b}-2\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{c}\circ\vec{b}\right)}{1-6\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^2}\vec{a},$$

$$\vec{y}=\vec{d}-2\cdot\frac{\vec{c}\circ\vec{b}-3\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\left(\vec{d}\circ\vec{b}\right)}{1-6\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^2}\vec{a}.$$

19. a) Mamy: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\left|\vec{u}-\vec{v}\right| \iff \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 \iff 2\vec{u}\circ\vec{v}=-2\vec{u}\circ\vec{v} \iff$

$\iff \vec{u}\circ\vec{v}=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$ lub $\vec{v}=\vec{0}$ lub $\vec{u}\perp\vec{v}$;

b) Mamy: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \iff \left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 \iff$

$\iff \left|\vec{u}\right|^2+2\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{v}\right|^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}^2 \iff$

$\iff \vec{u}^2+2\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}^2 \iff \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|=\vec{u}\circ\vec{v} \iff$

$\iff \vec{u}=\vec{0}$ lub $\vec{v}=\vec{0}$, lub wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają zgodne zwroty;

c) Rozwiąż jak przykład b;

d) Rozwiąż jak przykład b.

5.

1. Spójrz na rycinę 19. Według niej:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. Wobec tego:

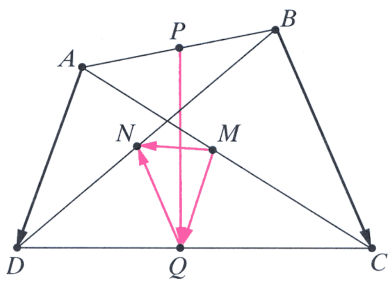
$MN\perp PQ \iff \overrightarrow{MN}\circ\overrightarrow{PQ}=0 \iff$

$\iff \left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}\right)\circ\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=0 \iff$

$\iff \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)\right)\circ\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=0 \iff$

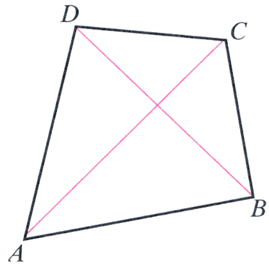
$\iff \overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BC}^2=0 \iff AD^2-BC^2=0 \iff$

$\iff AD^2=BC^2 \iff AD=BC.$



Ryc. 19.

2. Mamy (ryc. 20):



Ryc. 20.

$$AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC}^2 \iff$$

$$\iff \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \circ \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \circ \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}\right) \iff$$

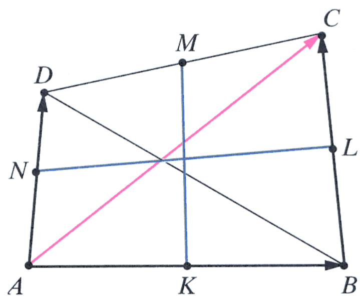
$$\iff \overrightarrow{AC} \circ \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC} \circ \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}\right) \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AC} \circ \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AC} \circ \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = 0 \iff \overrightarrow{AC} \circ 2\overrightarrow{DB} = 0 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{DB} = 0 \iff \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}.$$

3. Przyjmijmy (ryc. 21), że: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.



Ryc. 21.

Wówczas: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$,

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{d}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}\right)$,

$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} - \vec{c} - \vec{b}\right)$. Stąd:

$$KM = LN \iff KM^2 = LN^2 \iff \overrightarrow{KM}^2 = \overrightarrow{LN}^2 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{KM}^2 - \overrightarrow{LN}^2 = 0 \iff \left(\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{LN}\right) \circ \left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LN}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \vec{c} \circ \left(\vec{d} - \vec{b}\right) = 0 \iff \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0 \iff \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

4. Mamy: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BE} \iff \overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{BE} = 0 \iff \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \circ \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = 0 \iff$

$$\iff -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \circ \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \circ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff 2\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff 2\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff 2\overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff 2\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 \iff 2\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff$$

$$\iff BC^2 + AC^2 - \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = 4\overrightarrow{AB}^2 \iff BC^2 + AC^2 - BA^2 = 4AB^2 \iff$$

$$\iff BC^2 + AC^2 = 5AB^2.$$

5. Ponieważ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$ (ryc. 22), a ponadto $OA = OB = OC = OM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 =$

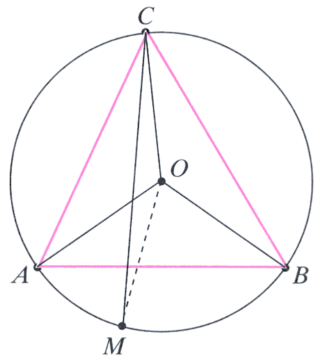
$= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 =$

$= 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \circ \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) =$

$= 3OM^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO} \circ \vec{O}$,

bo $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$ (wykaż to),

$= 6 \cdot OM^2 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$



Ryc. 22.

6. Zauważmy, że: $\overrightarrow{BK} \circ \overrightarrow{AL} = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OK}\right) \circ \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OL}\right) = \left(\overrightarrow{BO} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right) \circ \left(\overrightarrow{AO} + \frac{2}{7}\overrightarrow{OB}\right) =$

$= \left(-\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) \circ \left(-\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} - \frac{2}{7}\vec{b}^2 - \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{14}\vec{a} \circ \vec{b} =$

$= \frac{15}{14}\vec{a} \circ \vec{b} - \frac{2}{7}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{15}{14} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{15}{28} - \frac{15}{28} = 0$. Stąd $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{AL}$.

6.

6.1.

8. a) Skorzystajmy z twierdzenia 1. Ponieważ $\overrightarrow{SA_i} = [x_i - x]$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, gdzie x jest współrzędną punktu S, czyli $S = (x)$, więc:

$\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \ldots + \overrightarrow{SA_n} = [x_1 - x] + [x_2 - x] + \ldots + [x_n - x] =$
$= [x_1 - x + x_2 - x + \ldots + x_n - x] = [x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nx]$.

Zatem:

$$\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \ldots + \overrightarrow{SA_n} = \vec{0} \iff x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nx = 0 \iff x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

b) Postępując podobnie jak w przypadku a, otrzymamy, że szukany punkt S ma współrzędną: $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

6.2.

7. $D = (-1; 0)$, $E = (7; -2)$, $F = (3; 6)$.

8. $C = (0; -2)$, $D = (2; 4)$.

9. a) $S = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right)$;

b) $S = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)$.

Wskazówka: Postępuj jak w zadaniu 8 z poprzedniego podrozdziału i skorzystaj z twierdzenia 2.

10. Z poprzedniego zadania wiemy, że punkt będący środkiem masy układu punktów $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2; y_2), \ldots, A_n = (x_n; y_n)$ o masach odpowiednio $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ma współrzędne:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\ y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Współrzędne środka T masy punktów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ o masach $m_1, m_2, \ldots, m_k$ wynoszą odpowiednio:

$$x_T=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k},\ y_T=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ky_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Wobec tego środek masy układu punktów $T, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ o masach odpowiednio $m_1+m_2+\ldots+m_k, m_{k+1}, m_{k+2}+\ldots+m_n$ ma współrzędne:

$$x=\frac{(m_1+\ldots+m_k)x_T+m_{k+1}x_{k+1}+\ldots+m_nx_n}{(m_1+m_2+\ldots+m_k)+m_{k+1}+\ldots+m_n}=$$

$$=\frac{(m_1+\ldots+m_k)\cdot\dfrac{m_1x_1+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}+m_{k+1}x_{k+1}+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_k+m_{k+1}+\ldots+m_n}=$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$y=\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_k)y_T+m_{k+1}y_{k+1}+\ldots+m_ny_n}{(m_1+m_2+\ldots+m_k)+m_{k+1}+\ldots+m_n}=$$

$$=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

a więc równe współrzędnym środka masy układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Stąd teza.

11. $6\sqrt{2}+2\sqrt{5}$; równoległobok.

12. $8+\sqrt{58}$.

13. 5,5.

6.3.

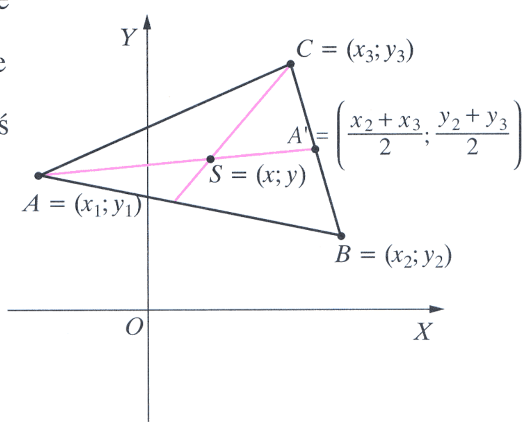
8. Rozważmy dowolny trójkąt ABC i przyjmijmy, że $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, $C=(x_3;y_3)$.

Środek A' boku BC ma więc współrzędne: $\frac{x_2+x_3}{2}$ i $\frac{y_2+y_3}{2}$ (ryc. 23). Zatem $A'=\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$. Niech $S=(x;y)$ będzie środkiem ciężkości tego trójkąta. Wiemy, że $\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{SA'}$. Ponieważ $\overrightarrow{AS}=[x-x_1;y-y_1]$, zaś $\overrightarrow{SA'}=\left[\frac{x_2+x_3}{2}-x;\frac{y_2+y_3}{2}-y\right]$, więc

$\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{SA'} \iff x-x_1=x_2+x_3-2x$ i $y-y_1=y_2+y_3-2y \iff$

$\iff x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ i $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

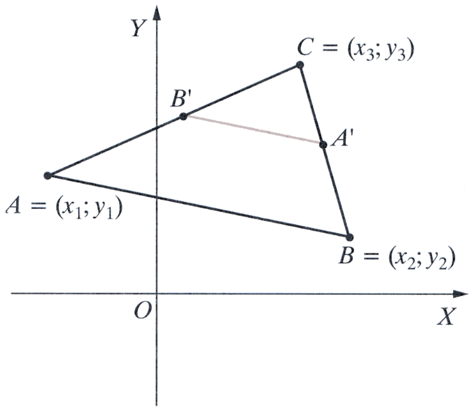
Odpowiedź: $S=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.



Ryc. 23.

9. W trójkącie ABC (ryc. 24) niech: $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, $C=(x_3;y_3)$. Wobec tego środki A' i B' odpowiednio boków BC i CA mają współrzędne:

$$A'=\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right),\ B'=\left(\frac{x_3+x_1}{2};\frac{y_3+y_1}{2}\right).$$



Ryc. 24.

Zatem:

$$\overrightarrow{A'B'}=\left[\frac{x_3+x_1}{2}-\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_3+y_1}{2}-\frac{y_2+y_3}{2}\right]=$$

$$=\left[\frac{x_1-x_2}{2};\frac{y_1-y_2}{2}\right]=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1);-\frac{1}{2}(y_2-y_1)\right]=-\frac{1}{2}\cdot[x_2-x_1;y_2-y_1]=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

czyli $\overrightarrow{A'B'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Wynika stąd, że $\overrightarrow{A'B'}\parallel\overrightarrow{AB}$ i $A'B=\frac{1}{2}AB$.

10. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 9.

11. Niech w pięciokącie $ABCDE$:

$A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$, $C=(x_3;y_3)$, $D=(x_4;y_4)$, $E=(x_5;y_5)$ (ryc. 25). Wówczas:

$$P=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right),\ Q=\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right),\ R=\left(\frac{x_3+x_4}{2};\frac{y_3+y_4}{2}\right),\ S=\left(\frac{x_4+x_5}{2};\frac{y_4+y_5}{2}\right).$$

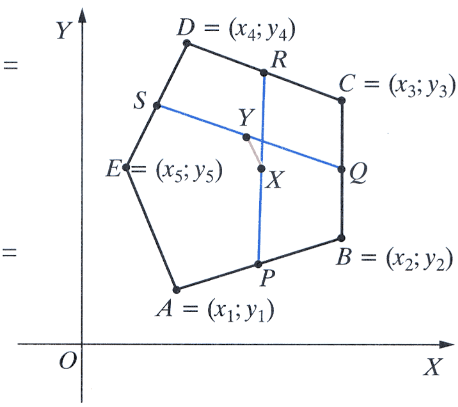
Wobec tego:

$$X=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right);\frac{1}{2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right),$$

$$Y=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_4+x_5}{2}\right);\frac{1}{2}\left(\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_4+y_5}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4};\frac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}\right).$$



Ryc. 25.

Zatem:

$$\overrightarrow{XY}=\left[\frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right]=$$

$$=\left[\frac{x_5-x_1}{4};\frac{y_5-y_1}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}(x_5-x_1);\frac{1}{4}(y_5-y_1)\right]=$$

$=\frac{1}{4}[x_5-x_1;y_5-y_1]=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, skąd wynika teza zadania.

6.4.

10. $p = 0$ lub $p = -4$.

11. Rzutem wektora $\vec{u}$ na oś o kierunku wektora $\vec{v}$ jest wektor $\vec{w} = |\vec{u}| \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{u}; \vec{v}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Po podstawieniu do tego wzoru podanych w zadaniu wartości otrzymujemy:

$\vec{w} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{3} = \frac{5}{6}\vec{v}$.

12. Szukany wektor $\vec{w}$ jest postaci (porównaj rozwiązanie zadania 11):

$\vec{w} = \left|\vec{u}\right| \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{u}; \vec{v}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Ponieważ $\cos\sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, więc $\vec{w} = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$.

Na podstawie założeń danych w zadaniu mamy:

$\vec{u} \circ \vec{v} = \left(5\vec{m} - 2\vec{n}\right) \circ \left(-2\vec{m}\right) = -10\vec{m}^2 = -10, \left|\vec{v}^2\right| = \vec{v}^2 = \left(-2\vec{m}\right)^2 = 4\vec{m}^2 = 4 \cdot 1 = 4.$

Zatem $\vec{w} = -\frac{5}{2}\vec{v}$.

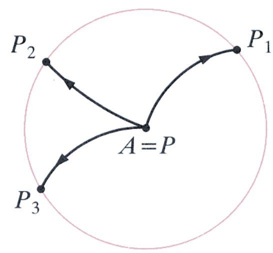
13. $\vec{w} = -2\vec{v}$.

Rozdział VII.

1.

5. a) tak; b) tak; d) tak; e) nie.

2.



Ryc. 26.

4. Nie jest, gdyż podany warunek pozwala pewnym punktom przyporządkować więcej niż jeden punkt, na przykład gdy $P = A$, wówczas P' może być dowolnym punktem okręgu o środku A i promieniu długości 2 (ryc. 26).

5. a) nie ma punktów stałych;

b) $P = (1; 1)$;

c) wszystkie punkty osi OY.

6. a) $(x; y) \xrightarrow{T_2T_1} (-2x; y+1)$,
$(x; y) \xrightarrow{T_1T_2} (-2x; y+1)$;

b) $(x; y) \xrightarrow{T_2T_1} (-x; -y)$,
$(x; y) \xrightarrow{T_1T_2} (-x; -y)$;

c) $(x; y) \xrightarrow{T_2T_1} (2y; x+2)$,
$(x; y) \xrightarrow{T_1T_2} (y+2; 2x)$.

3.

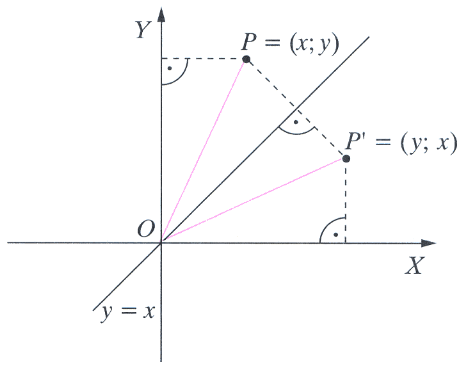
7. a) tak; b) tak; c) tak; d) nie; e) nie.

8. Dla dowolnej funkcji $g : R \to R$ okresowej o okresie 1 przekształcenie $f : R \to R$ określone wzorem $f(x) = g(x) + x$ spełnia warunek zadania. Mamy bowiem $f(x+1) = g(x+1) + (x+1) = g(x) + (x+1) = (g(x) + x) + 1 = f(x) + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, co oznacza, że obrazy dowolnych punktów x i $x+1$ odległych o 1 w odwzorowaniu f też są odległe o 1.

Przyjmując ponadto, że $g(0) = 0$, otrzymamy: $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Jedyną izometrią I osi liczbowej mającą punkty stałe 0 i 1 jest przekształcenie tożsamościowe: $I(x) = x$. Zatem, jeśli $g(x)$ jest niezerową funkcją okresową o okresie 1 i $g(0) = 0$, to przekształcenie $f(x)$ osi liczbowej określone wzorem $f(x) = g(x) + x$ spełnia warunki zadania.

7.

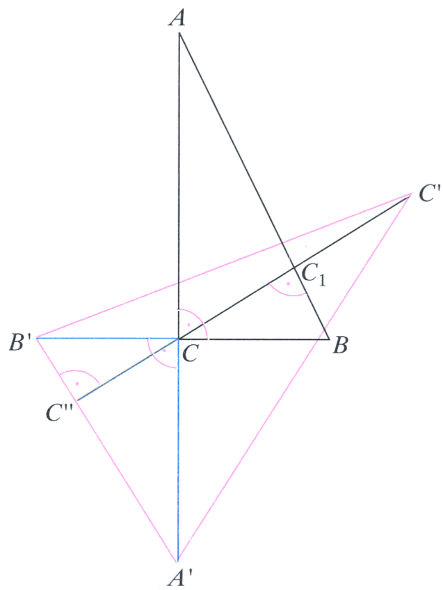
11. Zauważmy, że punkty P i P' są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$ (ryc. 27).



Ryc. 27.

12. $A' = (1; -3)$, $B' = (1; 3)$, $C' = (4; -1)$, $D' = (4; 1)$.

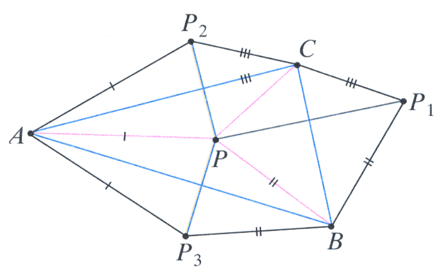
13. Teza zadania wynika stąd, że $A'B' = AB$ oraz $C''C' = 3 \cdot CC_1$ (ryc. 28).



Ryc. 28.

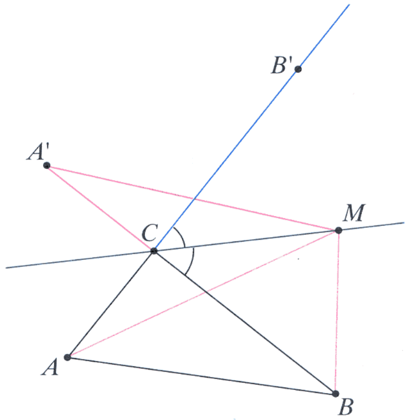
14. Ponieważ $PA = AP_2 = AP_3$, $PB = BP_3 = PB_1$, $CP = CP_1 = CP_2$ (ryc. 29), więc:

$AP_3 + P_3B + BP_1 + P_1C + CP_2 + P_2A =$
$= (AP_3 + P_2A) + (P_3B + BP_1) + (P_1C + CP_2) =$
$= 2PA + 2PB + 2PC = 2(PA + PB + PC)$.



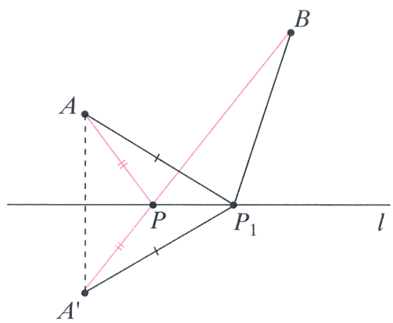
Ryc. 29.

15. Oznaczmy przez A' i B' obrazy punktów A i B w symetrii względem prostej CM (ryc. 30). Wówczas $MA + MB = MA' + MB > A'B = A'C + CB = CA + CB$, bo $MA = MA'$, $A'C = CA$.



Ryc. 30.

16. Niech A' będzie obrazem punktu A względem prostej l (ryc. 31). Wówczas dla dowolnego punktu P_1 prostej l mamy: $AP_1 + P_1B = A'P_1 + P_1B \geqslant A'B$, przy czym równość zachodzi, gdy P_1 jest punktem odcinka $A'B$. Dlatego szukanym punktem P jest punkt przecięcia prostej l i odcinka $A'B$.



Ryc. 31.

8.

6. Zachodzą dwa przypadki:

1. Oś symetrii czworokąta przechodzi przez dwa przeciwległe jego wierzchołki – wówczas czworokąt ten jest deltoidem i można wpisać w niego okrąg.
2. Oś symetrii czworokąta przechodzi przez środki dwóch przeciwległych jego boków – wówczas czworokąt ten jest trapezem równoramiennym, który jak wiemy, można wpisać w okrąg.

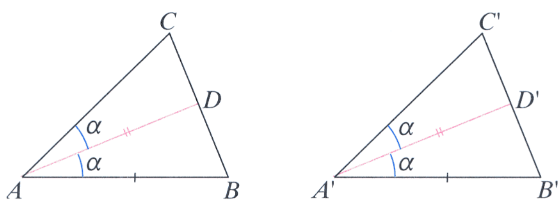
7. $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, $x = 0$.

8. $x + y = 3$, $y = x$.

9. Wskazówka: Najpierw zbuduj trójkąt BCD', gdzie D' jest punktem symetrycznym do D względem prostej AC.

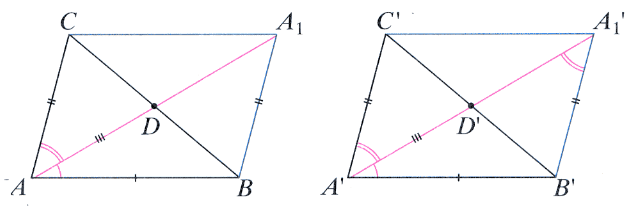
9.

9. Z cechy BKB wynika przystawanie trójkątów ADB i $A'D'B'$ (ryc. 32), a stąd – równość kątów $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle B'$. Teraz wystarczy powołać się na cechę KBK, by stwierdzić przystawanie trójkątów ABC i $A'B'C'$.



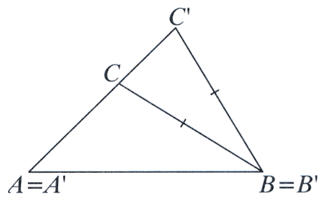
Ryc. 32.

10. Przedłuż środkowe AD i $A'D'$ odpowiednio do takich punktów A_1 i A_1', aby czworokąty ABA_1C i $A'B'A_1'C'$ były równoległobokami (ryc. 33). Otrzymasz wtedy przystające trójkąty ABA_1 i $A'B'A_1'$ (na mocy cechy BBB), a stąd (na mocy cechy BKB) wynika przystawanie trójkątów ABC i $A'B'C'$.



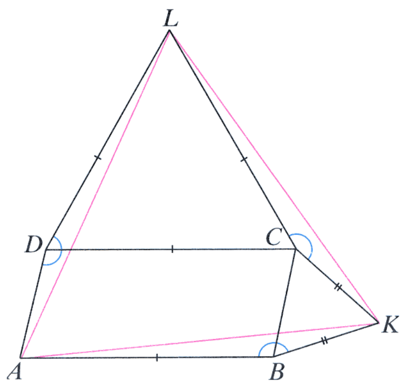
Ryc. 33.

11. Z podanych równości nie musi wynikać przystawanie tych trójkątów (ryc. 34).



Ryc. 34.

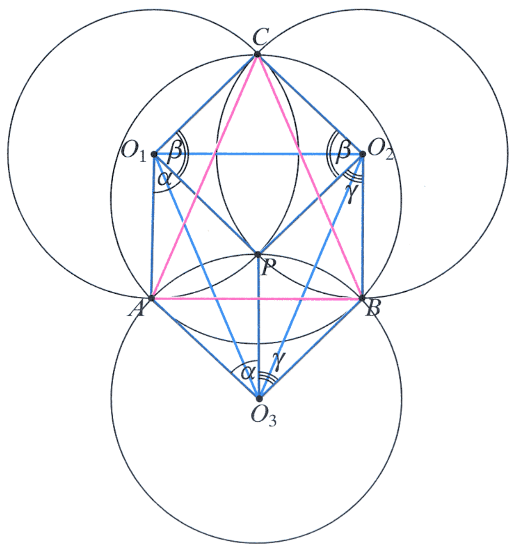
12. Zauważmy, że trójkąty AKB, CKL i ALD są przystające (na mocy cechy BKB; ryc. 35). Stąd wynika równość ich boków AK, KL i LA, które są bokami trójkąta AKL. Jest więc on równoboczny.



Ryc. 35.

10.

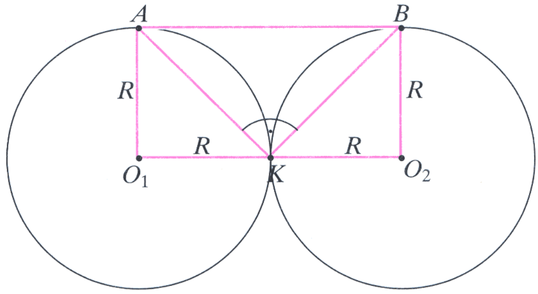
9. Oznaczmy środki tych okręgów przez O_1, O_2 i O_3, a ich punkty wspólne przez A, B i C (ryc. 36). Długość promieni tych okręgów oznaczmy przez R. Widać teraz, że czworokąty AO_3PO_1, O_1PO_2C i O_2PO_3B są rombami o boku długości R. Z przystawania trójkątów: AO_1C i O_3PO_2, BO_2C i O_1PO_3 oraz AO_3B i O_1CO_2 wynikają odpowiednio równości: $AC = O_2O_3$, $BC = O_1O_3$ oraz $AB = O_1O_2$, a z nich – przystawanie trójkątów ABC i $O_1O_2O_3$. Wobec tego okręgi opisane na tych trójkątach są przystające. Teraz pozostaje tylko zauważyć, że okrąg opisany na trójkącie $O_1O_2O_3$ ma promień długości R, gdyż $O_1P = O_2P = O_3P = R$. Kończy to dowód tezy zadania.



Ryc. 36.

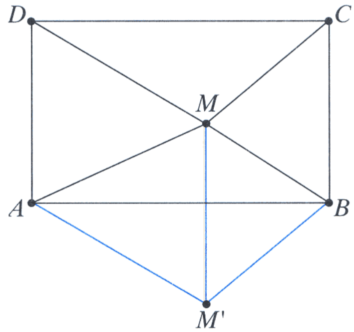
11.

18. Rozważmy translację $T_{\overrightarrow{AB}}$. Oczywiście $T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ (ryc. 37). Niech $T_{\overrightarrow{AB}}(O_1) = O_1'$. Ponieważ translacja ta przekształca jeden okrąg na drugi, więc także środek O_1 na środek O_2. Stąd $O_1' = O_2$, a zatem $T_{\overrightarrow{AB}}(O_1) = O_2$, co oznacza, że $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AB}$. Wobec tego $AB = O_1O_2 = 2R$.



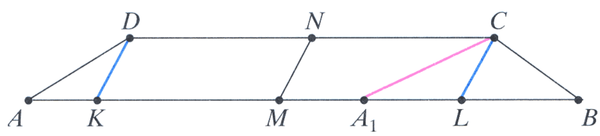
Ryc. 37.

19. W translacji o wektor $\overrightarrow{CB}$ (ryc. 38) obrazem punktu D jest A, punktu C – punkt B, zaś punktu M – punkt M'. Powstały czworokąt $AM'BM$ jest tym, o którym mowa w tezie zadania.



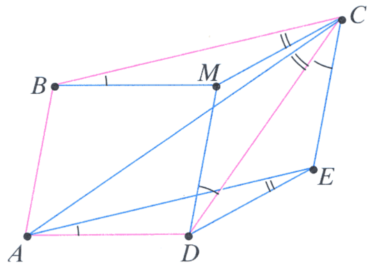
Ryc. 38.

20. Z treści zadania wynika, że $AB > CD$. Obierzmy na odcinkach AM i MB odpowiednio takie punkty K i L, aby $DK \parallel MN$ i $CL \parallel MN$ (ryc. 39). Wówczas $AK = AM - KM = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB - CD) = MN$. W translacji $T_{\overrightarrow{KL}}$ otrzymamy: $T_{\overrightarrow{KL}}(D) = C$, $T_{\overrightarrow{KL}}(K) = L$. Niech $T_{\overrightarrow{KL}}(A) = A_1$. W trójkącie A_1CB jest $A_1L = LB = CL$, więc L jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Średnicą tego okręgu jest A_1B. Wobec tego kąt A_1CB jest prosty. Wynika stąd, że suma pozostałych kątów tego trójkąta jest kątem prostym, a co za tym idzie $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90°$.



Ryc. 39.

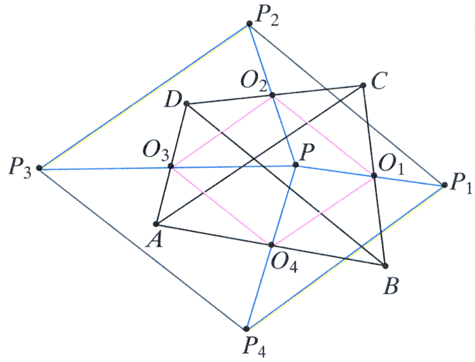
21. Rozważmy translację $T_{\overrightarrow{BA}}$. Niech $T_{\overrightarrow{BA}}(C) = E$. Oczywiście $T_{\overrightarrow{BA}}(M) = D$, więc czworokąt $MDEC$ jest równoległobokiem (ryc. 40). W translacji tej obrazem trójkąta BMC jest trójkąt ADE. Z równości kątów DAE i DCE wynika, że czworokąt $ADEC$ można wpisać w okrąg. Wobec tego $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACD$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku). A ponieważ $\sphericalangle AED = \sphericalangle BCM$, więc $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCM$.



Ryc. 40.

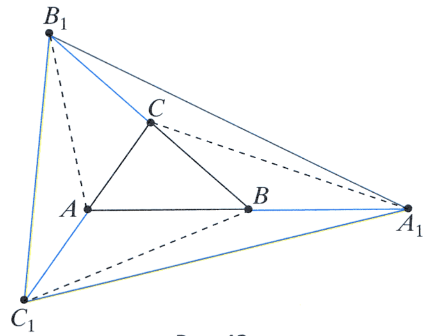
12.

10. Oznaczmy środki boków BC, CD, DA i AB tego czworokąta odpowiednio przez O_1, O_2, O_3 i O_4, a obrazy punktu P w symetriach względem nich odpowiednio przez P_1, P_2, P_3 i P_4 (ryc. 41). Nietrudno teraz udowodnić (korzystając np. z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta), że czworokąt $O_1O_2O_3O_4$ jest równoległobokiem o polu dwa razy mniejszym od pola czworokąta $ABCD$, a czworokąt $P_1P_2P_3P_4$ – równoległobokiem o polu cztery razy większym od równoległobok $O_1O_2O_3O_4$.



Ryc. 41.

11. 7 razy. Wystarczy połączyć odcinkami wierzchołki A, B, C danego trójkąta odpowiednio z wierzchołkami B_1, C_1, A_1 trójkąta $A_1B_1C_1$. Otrzymamy wtedy sześć trójkątów o polach równych polu danego trójkąta ABC (ryc. 42).



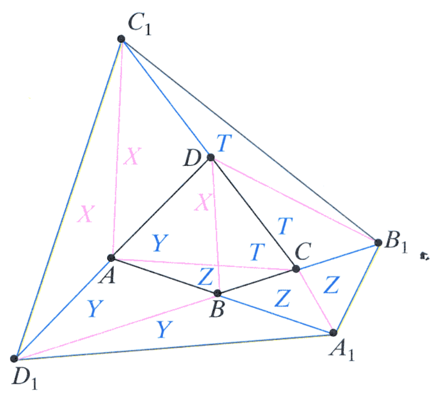
Ryc. 42.

12. 5 razy. Podobnie jak w poprzednim zadaniu łączymy odcinkami wierzchołki A, B, C, D czworokąta $ABCD$ z wierzchołkami odpowiednio C_1, D_1, A_1, B_1 czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ (ryc. 43). Wówczas, po oznaczeniu pola czworokąta $ABCD$ przez S, zaś:

a) trójkątów AD_1C_1, ADC_1 i ADC przez X,
b) trójkątów ABD_1, ABD i A_1BD_1 przez Y,
c) trójkątów ABC, A_1BC i A_1B_1C przez Z,
d) trójkątów BCD, B_1CD i B_1C_1D przez T

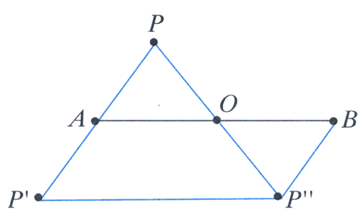
otrzymujemy, że pole S_1 czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest równe:

$S_1 = S + 2X + 2Y + 2Z + 2T = S + 2(X+Z) +$
$+2(Y+T) = S + 2S + 2S = 5S.$



Ryc. 43.

13. Sposób pierwszy: Niech P będzie dowolnym punktem, P' zaś jego obrazem w symetrii S_A. Ponieważ $P' = S_A(P)$, to $\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP}$ (ryc. 44). Niech $P'' = T_{\overrightarrow{AB}}(P')$. Zatem $P'' = T_{\overrightarrow{AB}}S_A(P)$. Połączmy teraz punkty P i P'' odcinkiem. Odcinki PP'' i AB przecinają się w środku O odcinka AB, gdyż w trójkącie $PP'P''$ odcinek AO



Ryc. 44.

przechodzi przez środek A boku PP' i jest równoległy do boku $P'P''$, stąd $PO = OP''$ i $AO = \frac{1}{2}P'P'' = \frac{1}{2}AB$. Oznacza to, że punkty P i P'' są symetryczne względem środka O odcinka AB. Zatem $P'' = S_O(P)$. Z dowolności wyboru punktu P otrzymujemy równość przekształceń $T_{\overrightarrow{AB}}S_A$ i S_O.

Sposób drugi: Skorzystamy z twierdzenia ustalającego związek symetrii środkowej z translacją. Zgodnie z nim $T_{\overrightarrow{AB}} = S_O S_A$. Ponadto wiemy, że $S_A S_A = I_O$.
Zatem $T_{\overrightarrow{AB}} S_A = (S_O S_A) S_A = S_O (S_A S_A) = S_O I_O = S_O$ (ryc. 45).

Ryc. 45.

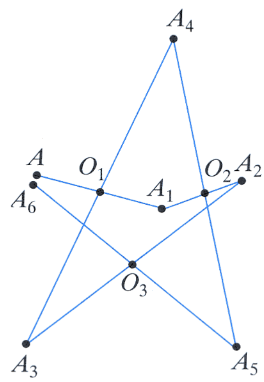
Sposób trzeci: Zastosujemy metodę współrzędnych.

Niech $A = (x_A; y)$, $B = (x_B; y_B)$. Wtedy $O = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, zaś $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A; y_B - y_A]$.
Stosując wzory określające symetrię środkową i translację, otrzymujemy dla dowolnego punktu $P = (x; y)$:

$$(T_{\overrightarrow{AB}} \cdot S_A)((x;y)) = T_{\overrightarrow{AB}}(S_A((x;y))) = T_{\overrightarrow{AB}}((-x + 2x_A; -y + 2y_A)) =$$
$$= (-x + 2x_A + x_B - x_A; -y + 2y_A + y_B - y_A) =$$
$$= (-x + (x_A + x_B); -y + (y_A + y_B)) = \left(-x + 2 \cdot \frac{x_A + x_B}{2}; -y + 2 \cdot \frac{y_A + y_B}{2}\right) = S_O.$$

14. Pomocą będzie rycina 46. Wystarczy wykazać, że $S_{O_3} S_{O_2} S_{O_1} S_{O_3} S_{O_2} S_{O_1}$ jest przekształceniem tożsamościowym.

Ponieważ, jak wiemy, $S_Y S_X = T_{2\overrightarrow{XY}}$, więc
$$S_{O_3} S_{O_2} S_{O_1} S_{O_3} S_{O_2} S_{O_1} = (S_{O_3} S_{O_2})(S_{O_1} S_{O_3})(S_{O_2} S_{O_1}) =$$
$$= T_{2\overrightarrow{O_2O_3}} T_{2\overrightarrow{O_3O_1}} T_{2\overrightarrow{O_1O_2}} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_2O_3}} =$$
$$= T_{2\left(\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3}\right)} = T_{2 \cdot \vec{0}} = T_{\vec{0}},$$ co kończy dowód tezy zadania.

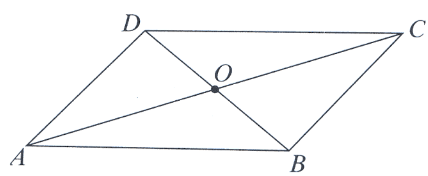


Ryc. 46.

13.

7. Niech A będzie środkiem symetrii figury F, zaś A_1 środkiem symetrii figury F_1. Gdy $A \neq A_1$, to teza nie zachodzi. Niech $A = A_1$, $F = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Jeśli $P \in F_2$, to $P \in F$, więc $P' = S_A(P) \in F$. Oczywiście $P' \in F_2$, gdyż $P' \notin F_1$. Zatem $S_A(F_2) = F_2$.

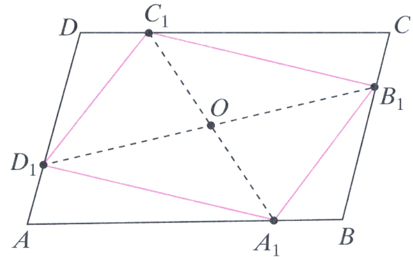
8. Niech O będzie środkiem symetrii czworokąta $ABCD$ (ryc. 47). Załóżmy, że $S_O(A) = C$. Wobec tego $S_O(B) = D$. Oczywiście punkt O leży wewnątrz tego czworokąta. Ponadto $S_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC}$. A ponieważ O nie leży na żadnym z odcinków AB i DC oraz odcinki AB i CD nie leżą na prostej przechodzącej przez O, więc odcinki te są różne i równoległe. Podobnie dowodzimy równoległości pozostałej pary boków czworokąta $ABCD$. Czworokąt ten jest więc równoległobokiem.



Ryc. 47.

9. Załóżmy, że figura ograniczona ma dwa środki symetrii O_1 i O_2. Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych XOY o osi OX równoległej do prostej O_1O_2. Ponieważ $S_{O_2} S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, więc figura ta byłaby w tej translacji swoim obrazem, co jest niemożliwe, gdyż obraz punktu tej figury, o maksymalnej odciętej, nie znajdzie się w tej figurze.

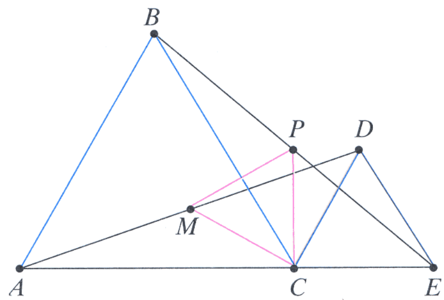
12. Niech O będzie środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$ (ryc. 48). Obrazami punktów A_1 i B_1 w symetrii S_O są odpowiednio: takie punkty A_1' i B_1' boków DC i AD, że $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1'A_1'}$.
Trójkąty A_1BB_1 i $A_1'DB_1'$ mają odpowiednio równoległe boki, a ponadto $A_1B_1 = A_1'B_1'$. Wynika stąd, że $C_1D_1 \parallel A_1'B_1'$ i $C_1D_1 = A_1'B_1'$. Zatem $A_1' = C_1$ i $B_1' = D_1$. Wobec tego O jest także środkiem symetrii równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.



Ryc. 48.

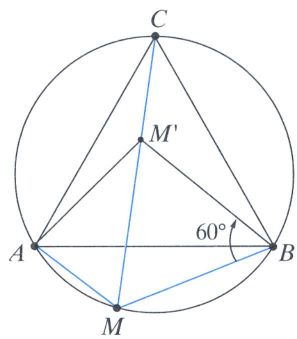
14.

13. Rozważmy obrót płaszczyzny wokół punktu C o kąt 60°, czyli przekształcenie $R_C^{60^\circ}$. Ponieważ $R_C^{60^\circ}(B) = A$, $R_C^{60^\circ}(E) = D$ (ryc. 49), czyli $R_C^{60^\circ}(BE) = AD$, więc $R_C^{60^\circ}(P) = M$. Stąd wynika, że trójkąt CMP jest równoboczny.



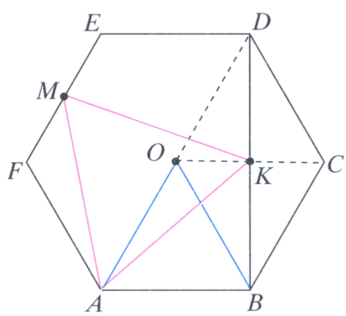
Ryc. 49.

14. Obróćmy płaszczyznę wokół punktu B o kąt -60°. Niech $R_B^{-60^\circ}(M) = M'$. Oczywiście $R_B^{-60^\circ}(A) = C$ (ryc. 50). Ponieważ $\sphericalangle AMB = 120^\circ$, więc $\sphericalangle CM'B = 120^\circ$. Trójkąt $MM'B$ jest równoboczny, stąd $\sphericalangle BM'M = 60^\circ$. Ponadto $\sphericalangle CM'B + \sphericalangle BM'M = 180^\circ$, więc M' leży na odcinku MC. Wobec tego $MC = MM' + M'C = MB + MA$.



Ryc. 50.

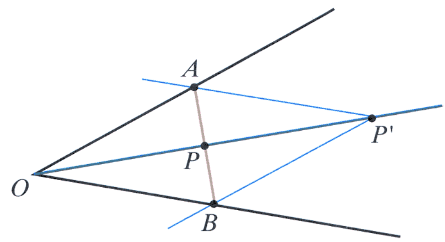
15. Niech O będzie środkiem tego sześciokąta (ryc. 51). Rozważmy obrót płaszczyzny dookoła punktu A o kąt 60°, czyli przekształcenie $R_A^{60^\circ}$. Widzimy, że $R_A^{60^\circ}(B) = O$, $R_A^{60^\circ}(OC) = FE$.
Punkt K jest środkiem przekątnej BD równoległoboku $BCDO$, więc jest także środkiem przekątnej OC. Wobec tego $R_A^{60^\circ}(K) = M$, co kończy dowód, że trójkąt AMK jest równoboczny.



Ryc. 51.

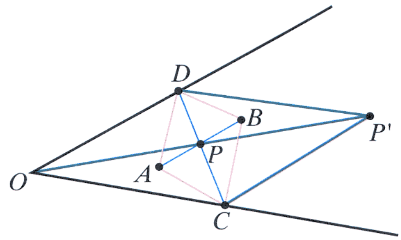
15.

1. Załóżmy, że zbudowaliśmy czworokąt $ABCD$. Przyjmijmy, że $AD > AB$. Niech $B' = S_{AC}(B)$. Punkt B' leży na boku AD, oraz $B'D = AD - AB$.
   W trójkącie $B'CD$ znamy długości wszystkich boków: $B'D = AD - AB$, $B'C = BC$. Budujemy więc najpierw trójkąt $B'CD$, a następnie na półprostej $\overrightarrow{DB'}$ konstruujemy punkt A. Dalsza konstrukcja staje się wówczas oczywista.
2. Niech O będzie wierzchołkiem danego kąta, zaś $P' = S_P(O)$ (ryc. 52). Przez punkt P' prowadzimy półproste równoległe do ramion tego kąta, przecinające je odpowiednio w punktach A i B. Odcinek AB jest tym, o który chodzi w zadaniu.



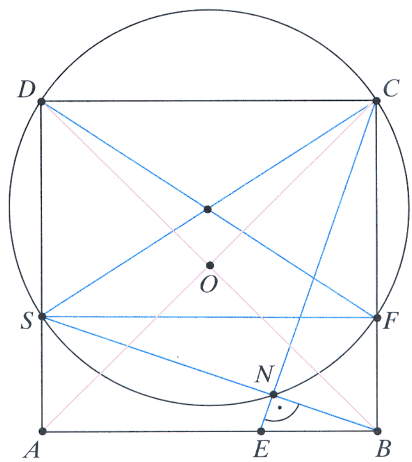
Ryc. 52.

3. Niech O będzie wierzchołkiem danego kąta, P – środkiem odcinka AB, $P' = S_P(O)$ (ryc. 53). Przez punkt P' prowadzimy półproste równoległe do ramion kąta, przecinające je w punktach C i D. Czworokąt $ACBD$ jest żądanym równoległobokiem.



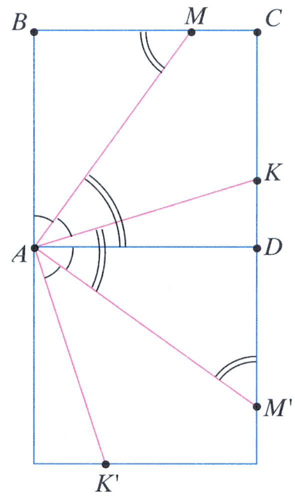
Ryc. 53.

4. Niech l będzie daną prostą, zaś $l' = S_A(l)$. Szukana prosta przechodzi przez punkt A i punkt przecięcia prostej l' z danym okręgiem.
5. Rozważmy okrąg S_1' będący obrazem S_1 w symetrii względem A. Szukana prosta przechodzi przez punkty wspólne okręgów S_1' i S_2.
6. Rozważmy obrót płaszczyzny wokół środka O danego kwadratu o kąt $-90°$, to jest przekształcenie $R_O^{-90°}$. Mamy (ryc. 54): $R_O^{-90°}(B) = A$, $R_O^{-90°}(CE) = BN$. Niech S będzie punktem przecięcia prostej BN z bokiem AD. Wtedy $AS = BE = BF$ i czworokąt $CDSF$ jest prostokątem. Opiszmy na nim okrąg. Ponieważ odcinek CS jest jego średnicą, a kąt CNS jest prosty, więc okrąg ten przechodzi przez punkt N. Odcinek DF jest średnicą tego okręgu, wobec tego kąt DNF jest prosty.



Ryc. 54.

7. Obróćmy kwadrat $ABCD$ wokół punktu A o kąt $-90°$. Niech $M' = R_A^{-90°}(M)$, $K' = R_A^{-90°}(K)$. Oczywiście (ryc. 55) $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DM'A$. Ponieważ $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MAB = \sphericalangle M'AD$, więc $\sphericalangle MAD = \sphericalangle M'AK$. Wobec tego $\sphericalangle M'AK = \sphericalangle MAD = \sphericalangle BMA = \sphericalangle DM'A$, czyli trójkąt AKM' jest równoramienny.
Stąd $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.



Ryc. 55.

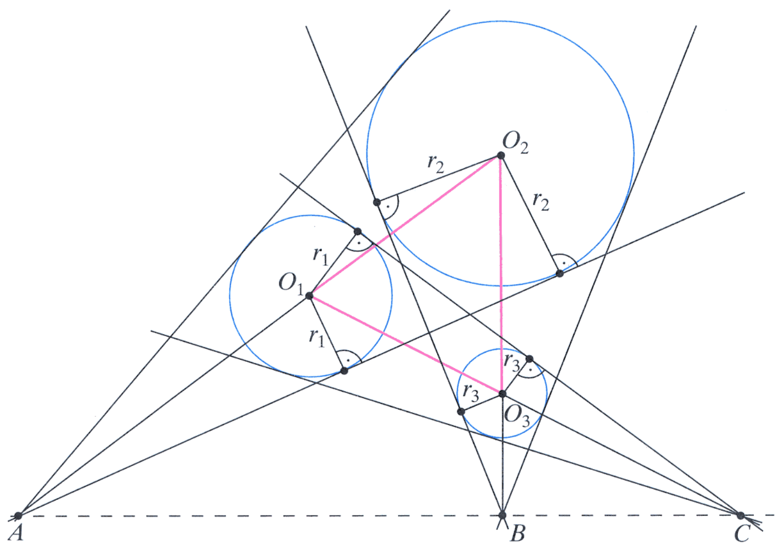
16.

9. a) na przykład $J^3_{(1;\,1)}$; b) na przykład $T_{[0;\,1]}J^2_{(-1;\,-1)}$;
c) na przykład $T_{[2;\,-1]}J^3_{(0;\,0)}$; d) na przykład $J^3_{(0;\,0)}T_{[2;\,-1]}$.

10. a) $y = -2x - 12$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$; c) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.

18.

6. Oznaczmy środki okręgów S_1, S_2 i S_3 odpowiednio przez O_1, O_2 i O_3 (ryc. 56).



Ryc. 56.

Okręgi S_1 i S_2 są jednokładne względem A w stosunku $\frac{r_1}{r_2}$, okręgi S_2 i S_3 są jednokładne względem B w stosunku $\frac{r_2}{r_3}$, zaś okręgi S_3 i S_1 są jednokładne względem C w stosunku $\frac{r_3}{r_1}$.
Zachodzą więc proporcje:
(1) $\frac{O_1A}{AO_2} = \frac{r_1}{r_2}$; (2) $\frac{O_2B}{BO_3} = \frac{r_2}{r_3}$; (3) $\frac{O_3C}{CO_1} = \frac{r_3}{r_1}$.

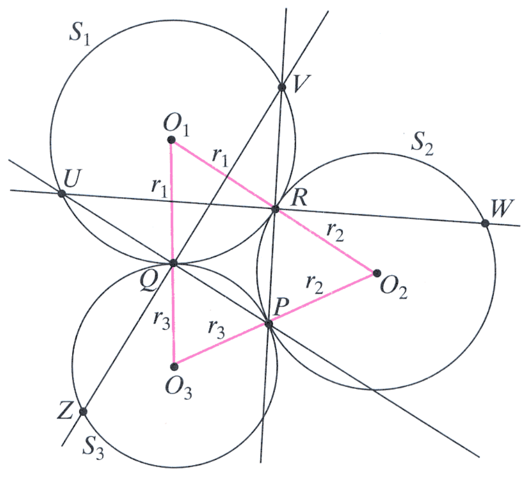
Wobec tego:

$$\frac{O_1A}{AO_2}\cdot\frac{O_2B}{BO_3}\cdot\frac{O_3C}{CO_1}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1.$$

Stąd wynika (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa, zastosowanego do trójkąta $O_1O_2O_3$ i punktów A, B, C leżących na przedłużeniach boków tego trójkąta), że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

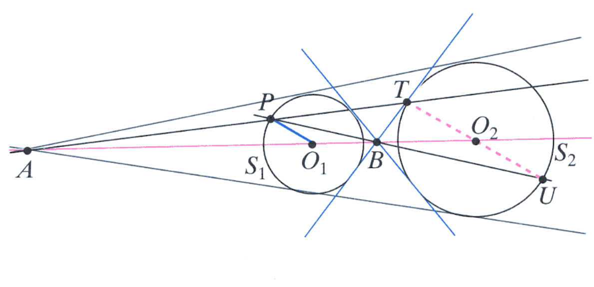
7. Można. Niech R będzie prostokątem, który można pokryć 25 kołami o promieniu długości 2. Poprowadźmy osie symetrii tego prostokąta. Podzielą go one na cztery prostokąty jednokładne do niego w stosunku $\frac{1}{2}$. Każdy z nich możemy oczywiście pokryć 25 kołami o promieniu 1; wystarczy bowiem przekształcić dane 25 kół o promieniu długości 2 przez jednokładność o stosunku $\frac{1}{2}$ względem odpowiedniego wierzchołka. Otrzymujemy w ten sposób 100 kół o promieniu długości 1 pokrywających cały prostokąt R.

8. Spójrzmy na rycinę 57 i oznaczenia na niej. Jednokładność $J_Q^{-\frac{r_3}{r_1}}$ przekształca okrąg S_1 na okrąg S_3, a każdą z prostych PU i VZ na siebie. Zatem obrazem punktu U jest punkt P, a obrazem punktu V punkt Z. Odcinek PZ, będący obrazem odcinka UV, jest do niego równoległy: $PZ \parallel UV$. Rozważywszy jednokładność $J_R^{-\frac{r_2}{r_1}}$, stwierdzamy, że $PW \parallel UV$. Wobec tego $PZ \parallel PW$, co oznacza, że punkty Z, P i W leżą na jednej prostej.



Ryc. 57.

9. Oznaczmy punkty przecięcia prostych AP i PB z okręgiem S_2, leżące bliżej punktu P, odpowiednio przez T i U (ryc. 58). Z jednokładności tych okręgów względem punktu A wynika równoległość odcinków O_1P i O_2T, a z ich jednokładności względem punktu B – równoległość odcinków O_1P i O_2U. Zatem odcinki O_2T i O_2U są równoległe, więc odcinek TU jest średnicą okręgu S_2, o którą chodzi w tezie zadania.



Ryc. 58.

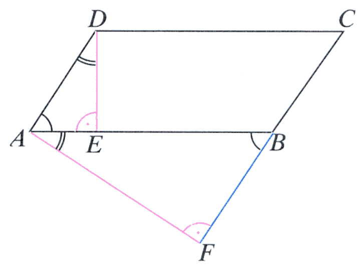
19.

12. Załóżmy wbrew tezie, że przekształcenie $P \circ P$ ma punkt stały. Niech będzie nim punkt A, czyli $P \circ P(A) = A$. Jeśli $B = P(A)$, to oczywiście $B \neq A$, bo podobieństwo P, z założenia, nie ma punktów stałych. Niech S będzie środkiem odcinka AB. Jest więc $\frac{1}{2} AB = AS = SB$, skąd wynika, że $\frac{1}{2} P(A)P(B) = P(A)P(S) = P(S)P(B)$. A ponieważ $P(A) = B$ i $P(B) = A$, więc $\frac{1}{2} AB = B\,P(S) = A\,P(S)$, co oznacza, że $P(S)$ jest środkiem odcinka AB. Wobec tego $P(S) = S$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód tezy zadania.

20.

6. 12, 15, 18, 21.

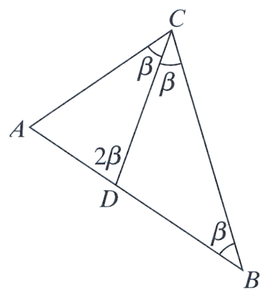
8. 21 i 15; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. Wskazówka: Zauważ, że $\Delta ADE \sim \Delta ABF$ w skali $\frac{5}{7}$ (ryc. 59).



Ryc. 59.

9. 15, 20, 25.

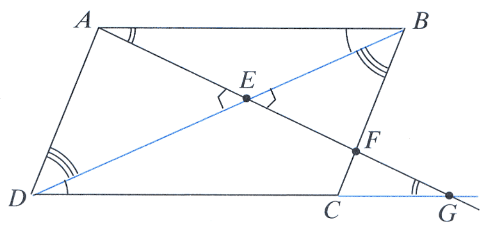
10. Zauważmy, że $\Delta ADC \sim \Delta ABC$, na mocy cechy KKK (ryc. 60). Zatem $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, skąd $AC^2 = AB \cdot AD$.



Ryc. 60.

11. Z podobieństwa trójkątów AEB i DEG oraz BEF i ADE (cecha KKK; ryc. 61) wynikają odpowiednio proporcje:

$\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EG}$ oraz $\frac{EB}{ED} = \frac{EF}{EA}$, a z nich równość $\frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$, czyli $EA^2 = EF \cdot EG$.



Ryc. 61.

21.

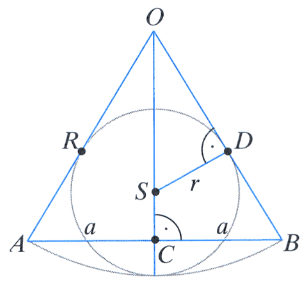
2. 7,5.

3. 5,6 i 1,4.

4. 14 i 8.

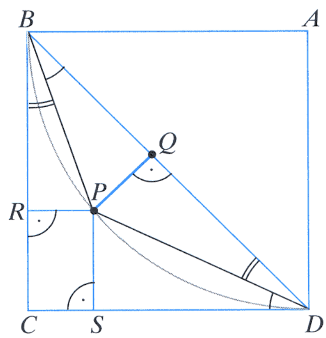
22.

3. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 62. Z podobieństwa trójkątów OSD i OBC wynika proporcja $\frac{SD}{OS} = \frac{CB}{OB}$, a z niej równość $\frac{r}{R-r} = \frac{a}{r}$, skąd następnie otrzymujemy równość $\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}$.



Ryc. 62.

4. Ponieważ kąt wpisany jest równy kątowi między cięciwą i styczną w jej końcu (ryc. 63), więc $\Delta BPQ \sim \Delta DPS$ i $\Delta BPR \sim \Delta DPQ$. Stąd otrzymujemy proporcje $\frac{BP}{DP} = \frac{PQ}{PS}$ i $\frac{BP}{DP} = \frac{PR}{PQ}$, a z nich równość $\frac{PQ}{PS} = \frac{PR}{PQ}$ i ostatecznie równość $PQ^2 = PS \cdot PR$.



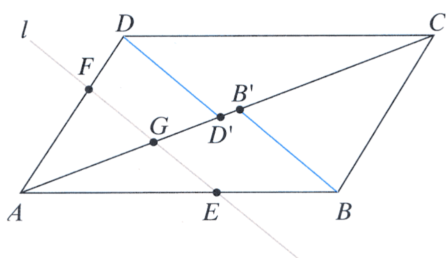
Ryc. 63.

6. Obierzmy na przekątnej AC takie punkty D' i B', aby odcinki BB' i DD' były równoległe do prostej l (ryc. 64). Wówczas z podobieństwa trójkątów ABB' i AEG oraz ADD' i AGF wynikają odpowiednio proporcje:

$\frac{AB}{AE} = \frac{AB'}{AG}$ i $\frac{AD}{AF} = \frac{AD'}{AG}$.

Ponieważ boki trójkątów ABB' i CDD' są parami równoległe, a $AB = CD$, więc trójkąty te są przystające i $AB' = CD'$. Wobec tego

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB'}{AG} + \frac{AD'}{AG} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$



Ryc. 64.

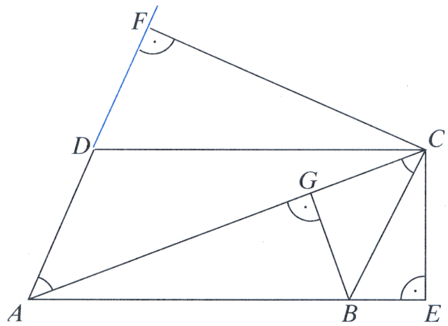
7. Niech G będzie rzutem prostokątnym wierzchołka B na przekątną AC danego równoległoboku (ryc. 65). Z podobieństwa trójkątów ABG i ACE wynika proporcja $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AG}$, a z niej równość:

(1) $AC \cdot AG = AE \cdot AB$.

Z podobieństwa trójkątów prostokątnych BGC i ACF wynika z kolei proporcja $\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{CG}$, a z niej – równość

(2) $AG \cdot CG = AF \cdot BC$.

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy $AC\,(AG+CG) = AE \cdot AB + AF \cdot BC$, czyli $AC^2 = AE \cdot AB + AF \cdot BC$.



Ryc. 65.

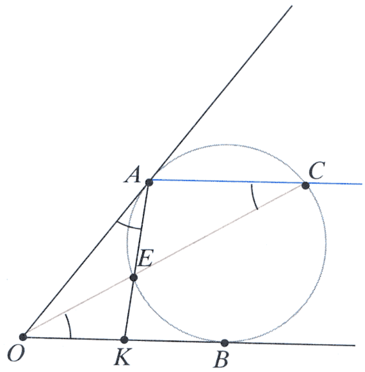
8. Ponieważ $\sphericalangle EOK = \sphericalangle OAK$ (ryc. 66), więc trójkąty OEA i OAK, o wspólnym kącie OKA, są podobne. Dlatego $\frac{EK}{OK}=\frac{OK}{AK}$, skąd

(1) $OK^2 = EK \cdot AK$.

Ponadto mamy równość:

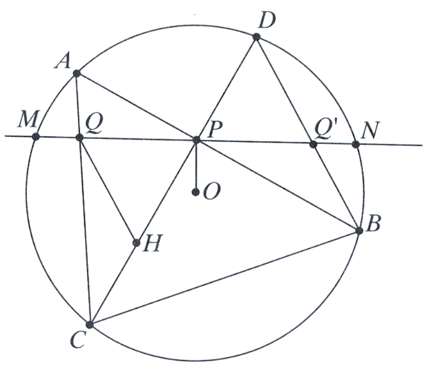
(2) $KB^2 = KE \cdot KA$

z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu. Wobec tego $OK^2 = KB^2$, czyli $OK = KB$.



Ryc. 66.

9. Niech D, M i N będą punktami przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABC z prostymi CH i PQ (ryc. 67). Wówczas $HP = PD$ oraz $PM = PN$. Ponieważ odcinki AB i CD przecinają się w punkcie będącym środkiem odcinka MN, więc na mocy twierdzenia o motylku wnioskujemy, że $PQ = PQ'$, gdzie Q i Q' są punktami przecięcia cięciwy MN z bokami odpowiednio AC i BD. Wobec tego $HQ \parallel DQ'$. Stąd mamy $\sphericalangle PHQ = \sphericalangle PDQ' = \sphericalangle CDB = \sphericalangle BAC$.



Ryc. 67.

Literatura pomocnicza

W. Bednarek, *Szkice o liczbach, funkcjach i figurach*, Toruń 2003.
L. Kourliandtczik, *Etiudy matematyczne*, Toruń 2001.
L. Kourliandtczik, *Impresje matematyczne*, Toruń 2002.
H. Pawłowski, *Matematyka 1. Zbiór zadań. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Gdynia 2003.

Przy opracowywaniu podręcznika skorzystano z następujących pozycji:

M. I. Abramowicz, M. T. Starodubcew, *Matiematika (Gieomietria i trigonomietriczeskije funkcji)*, Moskwa 1976.
B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II*, Warszawa 1995.
M. Hornowski, M. Pęczalski, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy VIII–IX*, Warszawa 1962.
S. Kartasiński, M. Okołowicz, *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych*, cz. I–II, Warszawa 1962–1967.
S. Kartasiński, M. Okołowicz, T. Stanisz, *Zbiór zadań maturalnych*, cz. IV–VI, Warszawa 1972–1979.
J. Kozicki, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy X–XI*, Warszawa 1960.
P. S. Modenow, *Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1955.
W. W. Prasołow, *Zadaczi po płanimietrii*, Moskwa 1986.
S. Serafin, G. Treliński, *Geometria. Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1976.

Wybrane strony internetowe:

http://eduseek.ids.pl – interesujący portal edukacyjny
www.wiw.pl/matematyka – część witryny *Wirtualny Wszechświat*
http://matma.prx.pl – ciekawy serwis matematyczny
www.epsilon.z.pl – strona o tematyce matematyczno-logicznej

Tablice

Alfabet grecki

A	α	alpha	H	η	eta	N	ν	ny	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ	theta	Ξ	ξ	ksi	Y	υ	ypsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	omikron	Φ	φ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ε	epsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	dzeta	M	μ	my	Σ	σ	sigma	Ω	ϖ	omega

Popularne liczby niewymierne

$\pi \approx 3{,}14159$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}41421$ $\quad \sqrt{3} \approx 1{,}73205$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70711$

$\sqrt{5} \approx 2{,}23607$ $\quad \sqrt{7} \approx 2{,}64575$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}57735$

Liczby pierwsze od 2 do 199

2	11	23	41	59	73	97	109	137	157	179	197
3	13	29	43	61	79	101	113	139	163	181	199
5	17	31	47	67	83	103	127	149	167	191	
7	19	37	53	71	89	107	131	151	173	193	

Jednostki długości

kilometr	$1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m} = 100000\,\mathrm{cm}$
metr	$1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm} = 100\,\mathrm{cm} = 0{,}001\,\mathrm{km}$
decymetr	$1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
centymetr	$1\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{dm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
milimetr	$1\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{cm} = 0{,}01\,\mathrm{dm} = 0{,}001\,\mathrm{m}$

Jednostki masy i ciężaru

tona	$1\,\mathrm{t} = 10\,\mathrm{q} = 1000\,\mathrm{kg}$
kwintal	$1\,\mathrm{q} = 0{,}1\,\mathrm{t} = 100\,\mathrm{kg}$
kilogram	$1\,\mathrm{kg} = 100\,\mathrm{dag} = 1000\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{t}$
dekagram	$1\,\mathrm{dag} = 10\,\mathrm{g} = 0{,}01\,\mathrm{kg}$
gram	$1\,\mathrm{g} = 1000\,\mathrm{mg} = 0{,}1\,\mathrm{dag} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
miligram	$1\,\mathrm{mg} = 0{,}001\,\mathrm{g}$

Jednostki pola

kilometr kwadratowy	$1\,\mathrm{km}^2 = 1000000\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{ha}$
metr kwadratowy	$1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2 = 10000\,\mathrm{cm}^2$
decymetr kwadratowy	$1\,\mathrm{dm}^2 = 100\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{m}^2$
centymetr kwadratowy	$1\,\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{dm}^2 = 0{,}0001\,\mathrm{m}^2$
milimetr kwadratowy	$1\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}0001\,\mathrm{dm}^2$
ar	$1\,\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m}^2 = 0{,}01\,\mathrm{ha}$
hektar	$1\,\mathrm{ha} = 10000\,\mathrm{m}^2 = 0{,}01\,\mathrm{km}^2 = 100\,\mathrm{a}$

Jednostki objętości i pojemności

metr sześcienny	$1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{dm}^3 = 1000000\,\mathrm{cm}^3$
decymetr sześcienny	$1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
centymetr sześcienny	$1\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{mm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{dm}^3$
litr	$1\,\mathrm{l} = 1000{,}028\,\mathrm{cm}^3 \approx 1\,\mathrm{dm}^3$
hektolitr	$1\,\mathrm{hl} = 100\,\mathrm{l} \approx 100\,\mathrm{dm}^3$
mililitr	$1\,\mathrm{ml} = 0{,}001\,\mathrm{l} \approx 1\,\mathrm{cm}^3$

Tablica funkcji trygonometrycznych

stopnie	sin	cos	tg	ctg	stopnie	sin	cos	tg	ctg
0	0, 000	1,000	0,000	–	45	0,707	0,707	1,000	1,000
1	0,017	1,000	0,017	57,290	46	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,035	0,999	0,035	28,636	47	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,052	0,999	0,052	19,081	48	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,070	0,998	0,070	14,301	49	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,087	0,966	0,087	11,430	50	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,105	0,995	0,105	9,514	51	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,122	0,993	0,123	8,144	52	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,115	53	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,314	54	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,671	55	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	56	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,705	57	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	58	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	59	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	60	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	61	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	62	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	63	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0,326	0,946	0,344	2,904	64	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	65	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	66	0,914	0,407	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	67	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	68	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,407	0,914	0,445	2,246	69	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	70	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	71	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	72	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	73	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	74	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	75	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	76	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	77	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	78	0,978	0,208	4,705	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	79	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	80	0,985	0,174	5,671	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	81	0,988	0,156	6,314	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	82	0,990	0,139	7,115	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	83	0,993	0,122	8,144	0,123
39	0,629	0,777	0,810	1,235	84	0,995	0,105	9,514	0,105
40	0,643	0,766	0,839	1,192	85	0,996	0,087	11,430	0,087
41	0,656	0,755	0,869	1,150	86	0,998	0,070	14,301	0,070
42	0,669	0,743	0,900	1,111	87	0,999	0,052	19,081	0,052
43	0,682	0,731	0,933	1,072	88	0,999	0,035	28,636	0,035
44	0,695	0,719	0,966	1,036	89	1,000	0,017	57,290	0,017
45	0,707	0,707	1,000	1,000	90	1,000	0,000	–	0,000

Indeks

B

Bézouta twierdzenie 61

C

Carnota twierdzenie 184
cechy podobieństwa trójkątów 287–289
cechy przystawania trójkątów 247–249
ciąg
- arytmetyczny 117
  - malejący 118
  - rosnący 118
  - stały 118
- geometryczny 129
- liczbowy 109
- liczbowy nieskończony 109
- malejący 114
- monotoniczny 114
- nieskończony 109
- rosnący 114
- rozbieżny do minus nieskończoności 161
- rozbieżny do plus nieskończoności 160
- skończony *k*-wyrazowy 109
- sum częściowych 167
- zbieżny 147

D

deltoid 246

F

figury
- jednokładne 278
- osiowo symetryczne 245
- podobne 285
- środkowo symetryczne 261

funkcja
- homograficzna 103
- kwadratowa 10
  - stale dodatnia 25
  - stale niedodatnia 25
  - stale nieujemna 25
  - stale ujemna 25
- równoważna 85
- wymierna 85

G

granica ciągu 146

H

Herona wzór 187
hiberbola 104
Hornera schemat 61

I

iloczyn
- funkcji 87
- przekształceń 234–235
- skalarny wektorów 207
- wielomianów stopnia dodatniego 73

iloraz
- ciągu geometrycznego 129
- funkcji 87

indeks wyrazów 109
izometria 236

J

jednokładność płaszczyzny 271
- dodatnia 271
- odwrotna 272
- piąta 271
- ujemna 272

jednomian
- podobny 50
- stopnia *n* 50

K

kapitalizacja odsetek 140
kąt skierowany 262
- obrotu 264
- półpełny 262
- prosty 262
- przeciwnie zorientowany 263
- przeciwny 263
- zerowy 262
- zgodnie zorientowany 263

koniec wektora 193
kwadrat skalarny wektora 209

M

miara wektora 201
miejsce zerowe
- funkcji 22
- wielomianu 49

N

nierówność
- algebraiczna stopnia *n*-tego 79
- drugiego stopnia 34
- kwadratowa 34
- wielomianowa stopnia *n*-tego 79
- wymierna 98

O

obrót płaszczyzny 264
obraz
- figury 231
- punktu 231

okres kapitalizacji 140
oś symetrii 244, 245

P

parabola 10
parametr 36
pierwiastek *m*-krotny wielomianu 65
pierwiastek wielomianu 49

pierwiastki funkcji kwadratowej 22, 29
początek wektora 193
podobieństwo 284
- wielokątów 289
postać ogólna 7
- kanoniczna trójmianu 8
- zasadnicza trójmianu 8
potęga punktu względem okręgu 292
procent składany 140
proporcjonalność odwrotna 105
przekształcenie
- izometryczne 236
- geometryczne płaszczyzny 231
- odwracalne 235
- tożsamościowe figury 234
- własne figury 232
- wzajemnie jednoznaczne figury 232
przemienność iloczynu skalarnego wektorów 209
przesunięcie równoległe płaszczyzny o wektor 252
Ptolemeusza twierdzenie 192
punkt stały przekształcenia 234

R

ramię
- końcowe 262
- początkowe 262
ramiona paraboli 10
rotacja płaszczyzny 264
rozdzielność iloczynu skalarnego wektorów 209
rozwiązywanie trójkąta 175
równanie
- algebraiczne stopnia n-tego 76
- drugiego stopnia 32
- dwukwadratowe 33–34
- kwadratowe 32
  - – – zupełne 33
  - – – niezupełne 33
- wielomianowe stopnia n-tego 76
- wymierne 92
różnica
- ciągu arytmetycznego 117
- wektorów 197
- wielomianów 52

S

skala podobieństwa 284
Stewarta wzór 188
stosunek
- jednokładności figur 278
- podziału wektora punktem 223
suma
- funkcji 86
- wektorów 196
- wielomianów 52

symetria
- osiowa 244
- środkowa względem punktu 256
- względem prostej 244
szereg geometryczny 167

Ś

środek
- ciężkości trójkąta 282
- jednokładności figur 278
- obrotu 264
- symetrii 215, 261

T

translacja płaszczyzny o wektor 252
trójmian kwadratowy 7

V

Viète'a wzory 29

W

wartość funkcji
- najmniejsza 15
- największa 15
wersor 228
wektor 193
- jednostkowy 228
- przeciwny 195
- równy 195
- równoległy 193–194
- swobodny 196
- zerowy 193
wielomian
- jednej zmiennej 49
- nierozkładalny 74
- rozkładalny 73
- unormowany 49
wierzchołek
- kąta skierowanego 262
- paraboli 10
wskaźnik wyrazów 109
współczynnik
- kierujący 49
- trójmianu 7
- wyrazu wolnego 49
współrzędne wektora 218
wyrazy
- ciągu 109
- wielomianu 51
wyróżnik trójmianu 8

Z

złożenie przekształceń 235

W ramach serii „Szkoła XXI"
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
proponuje zintegrowany zestaw
dydaktyczny do nauki matematyki
dla liceum ogólnokształcącego,
liceum profilowanego i technikum.

na nowej maturze
GWARANCJA SUKCESU

Pozycje z zestawu do tomu 2:

- Program nauczania zakresy podstawowy i rozszerzony

- Podręcznik zakres podstawowy

- Podręcznik zakres rozszerzony

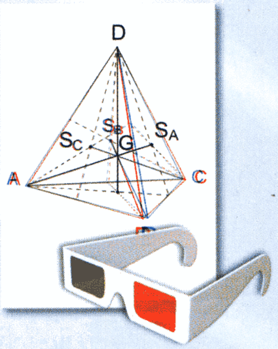
- Zbiór zadań linia 1 zakresy podstawowy i rozszerzony

- Zbiór zadań linia 2 zakresy podstawowy i rozszerzony

- Przewodnik dla nauczyciela zakresy podstawowy i rozszerzony

- Wybrane scenariusze lekcji zakresy podstawowy i rozszerzony

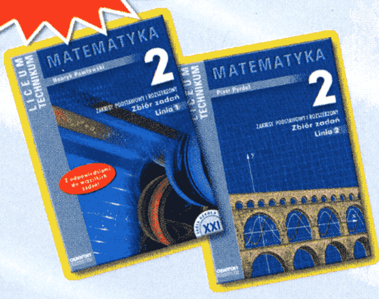
- Stereogramy część II zakresy podstawowy i rozszerzony



- Filmy edukacyjne zakresy podstawowy i rozszerzony

Nowość na rynku wydawniczym!

Dwie linie zbiorów zadań dla obu zakresów, różniące sie stopniem trudności i charakterem zadań.



KONSULTOWANE W POLSKICH SZKOŁACH

ISBN 83-7390-147-7
9 788373 901476

operon WYDAWNICTWO PEDAGOGICZNE

Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
www.operon.com.pl
e-mail: info@operon.pl
tel. centrali (058) 679 00 00